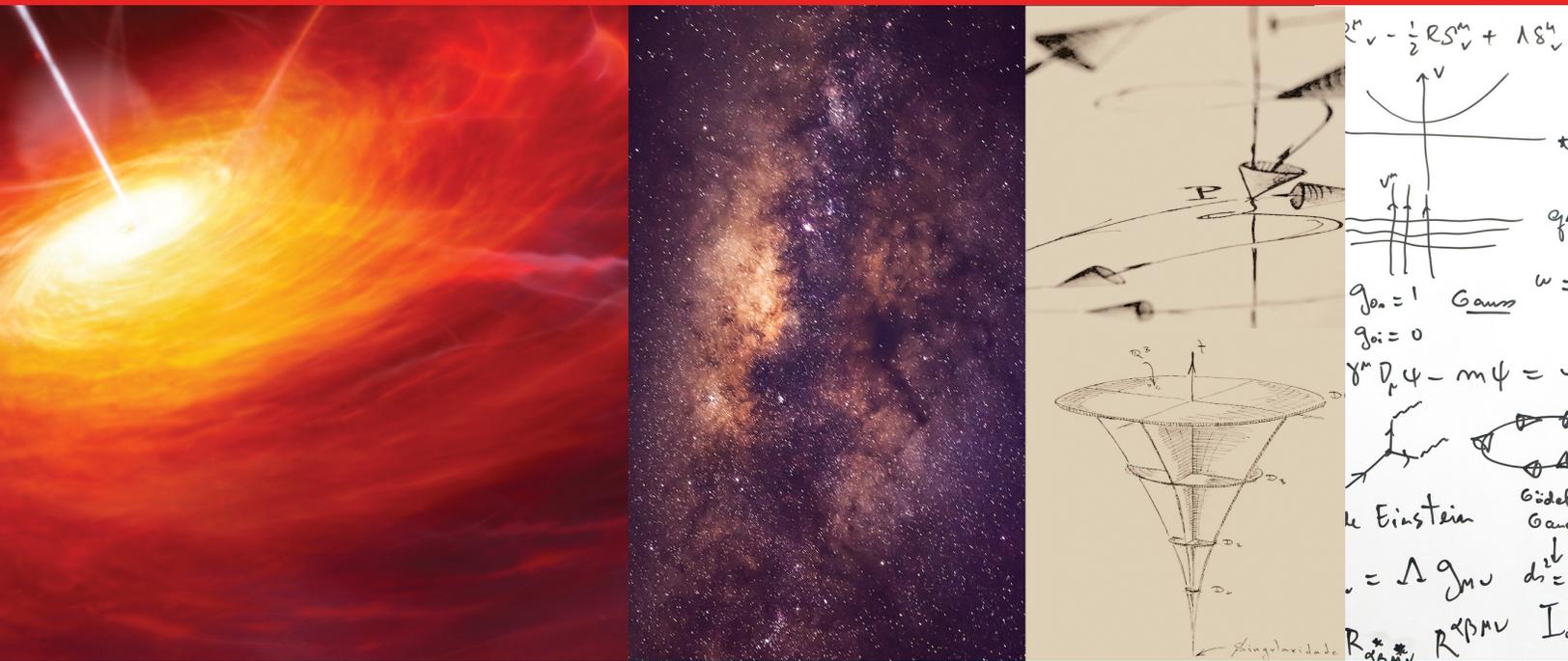


EXERCÍCIOS DE COSMOLOGIA



MARIO NOVELLO

EXERCÍCIOS DE COSMOLOGIA

Mario Novello

Copyright © 2016 Mario Novello

MARIONOVELLO.COM.BR

EDIÇÃO DO AUTOR, DEZEMBRO 2016 - RIO DE JANEIRO

Ilustração de capa de Flavia Schaller

Imagens: ESO/M. Kornmesser (1), CC0 (2), M. Novello (3 e 4)

Novello, Mario: Exercícios de Cosmologia

ISBN: 978-85-922216-0-7

1.Cosmologia I.Título

CONTEÚDO

1	Introdução	5
2	Notação, convenção, etc	7
3	Numerologia: análise Dimensional	31
4	Relações especiais	41
5	Geometrias especiais	59
6	Modelos cosmológicos não-singulares	99
7	Criação de partículas pelo campo gravitacional	129
8	Teoria da Relatividade Métrica	137
9	Mimetismo gravitacional associado a campos eletromagnéticos	153
10	Geometria efetiva em teorias não lineares do eletromagnetismo	167
11	O campo escalar	183

12	Cosmologia gerada por um campo escalar na RG	199
13	Teoria geométrica escalar da gravitação	205
14	Cosmologia de neutrino	215
15	Eletrodinâmica não-linear em espaços curvos	219
16	Efeitos cosmológicos da Eletrodinâmica não-linear	235
17	Fluidos especiais	265
18	Fluido de Heisenberg	279
19	Ponte dinâmica: eletrodinâmica dos corpos sem carga ..	297
20	Mecanismo gravitacional de geração de massa	309
21	Princípio de Mach generalizado	333
22	Geometria restrita de Cartan: dois campos de spin-2	343
23	Teoria das perturbações (modos de vibração do Universo)	349

1 INTRODUÇÃO

Em 1972, ao retornar ao Brasil depois de meu doutorado na Suíça, iniciei a formação de um grupo de estudos em gravitação e cosmologia no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas. Desde então, sistematicamente, ministrei cursos nessas áreas. Colecionei assim um grande número de exercicios alguns dos quais reproduzo aqui e um roteiro particular para sua análise. Esses exercicios não possuem o mesmo grau de dificuldade. Por minha experiência pessoal, achei conveniente misturar problemas simples com outros de grau de dificuldade bem maior. Na bibliografia o leitor poderá encontrar explicitamente soluções desses problemas, bem como alguns livros básicos sobre os diversos temas aqui tratados, como [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9] e [10].

Um comentário adicional se faz necessário. Além de questões de Cosmologia, inclui exercicios envolvendo tópicos de gravitação e eletromagnetismo. Em verdade, a Cosmologia envolve todas as áreas da fisica, não se identificando com essa ciência, mas sim produzindo sua re-fundação. Essa frase mereceria uma explicação adicional que não a farei aqui, remetendo o leitor interessado à sua análise a meu livro ***O que é Cosmologia***.

Acrescentei ao final de cada capítulo um roteiro de solução. No entanto, creio que embora seja possível aceitar que todo problema admita uma só solução, o caminho para chegar até ela raramente é único.

2 NOTAÇÃO, CONVENÇÃO, ETC

A variedade espaço-tempo que iremos examinar é um caso particular das geometrias de Riemann, caracterizada por um tensor simétrico de segunda ordem $g_{\mu\nu}$ e uma conexão $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$ relacionados pela formula

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\nu\alpha,\beta} + g_{\nu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}).$$

A métrica de Minkowski $\gamma_{\mu\nu}$ reduz-se no sistema de coordenadas cartesiano à expressão $\text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Em geral, nesse sistema de coordenadas iremos denotá-la como $\eta_{\mu\nu}$. Índices gregos variam de 0 a 3. A derivada covariante se escreve

$$v_{\mu;\nu} = v_{\mu,\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} v_{\alpha},$$

onde $v_{\mu,\nu} \equiv \partial_{\nu} v_{\mu}$ denota derivada parcial. A metricidade riemanniana está contida na expressão

$$g_{\mu\nu;\lambda} = 0.$$

Segue então

$$v^{\alpha}_{;\mu;\nu} - v^{\alpha}_{;\nu;\mu} = R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} v^{\beta},$$

onde $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}$ é o tensor de curvatura. Em termos da conexão tem-se:

$$R^{\mu}_{\epsilon\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}_{\epsilon\alpha,\beta} - \Gamma^{\mu}_{\epsilon\beta,\alpha} + \Gamma^{\mu}_{\beta\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\epsilon\alpha} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\beta\epsilon}.$$

O tensor de curvatura satisfaz as identidades algébricas

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\mu\nu\beta\alpha} = -R_{\nu\mu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu}$$

e as identidades de Bianchi

$$R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta;\lambda} + R^{\mu\nu}{}_{\lambda\alpha;\beta} + R^{\mu\nu}{}_{\beta\lambda;\alpha} = 0$$

Contraindo índices temos

$$R^{\mu\nu}{}_{;\nu} - \frac{1}{2} R_{,\nu} g^{\mu\nu} = 0,$$

que implica, via equações da relatividade geral, a conservação do tensor de energia-momentum. Variando a métrica dada na Lagrangiana

$$\delta S = \delta \int \sqrt{-g} R = 0,$$

e usando

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}.$$

obtemos as equações da Relatividade Geral que se escrevem sob a forma compacta como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}.$$

Essa expressão deve ser entendida, na forma explícita, como sendo

$$\begin{aligned} R_{\epsilon\beta} &\equiv \frac{1}{2} g^{\lambda\mu}{}_{,\beta} g_{\lambda\mu,\epsilon} + \frac{1}{2} g^{\lambda\mu} g_{\lambda\mu,\epsilon\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\mu}{}_{,\mu} (g_{\alpha\epsilon,\beta} + g_{\alpha\beta,\epsilon} - g_{\epsilon\beta,\alpha}) \\ &- \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} (g_{\alpha\epsilon,\beta\mu} + g_{\alpha\beta,\epsilon\mu} - g_{\epsilon\beta,\alpha\mu}) \\ &+ \frac{1}{4} g^{\mu\alpha} g^{\sigma\lambda} g_{\alpha\beta,\sigma} (g_{\lambda\epsilon,\mu} + g_{\lambda\mu,\epsilon} - g_{\epsilon\mu,\lambda}) \\ &+ \frac{1}{4} g^{\mu\alpha} g^{\sigma\lambda} g_{\alpha\sigma,\beta} (g_{\lambda\epsilon,\mu} + g_{\lambda\mu,\epsilon} - g_{\epsilon\mu,\lambda}) \\ &- \frac{1}{4} g^{\mu\alpha} g^{\sigma\lambda} g_{\beta\sigma,\alpha} (g_{\lambda\epsilon,\mu} + g_{\lambda\mu,\epsilon} - g_{\epsilon\mu,\lambda}) \\ &- \frac{1}{4} g^{\rho\sigma} g_{\rho\sigma,\lambda} g^{\lambda\alpha} (g_{\alpha\epsilon,\beta} + g_{\alpha\beta,\epsilon} - g_{\epsilon\beta,\alpha}) = -\kappa (T_{\epsilon\beta} - \frac{1}{2} T g_{\epsilon\beta}) \end{aligned}$$

Tensor de projeção

Seja v^μ o vetor campo normalizado de uma congruência de curvas em um espaço-tempo que possui uma métrica $g_{\mu\nu}$. Definimos o projetor $h_{\mu\nu}$ pela expressão

$$h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - v_\mu v_\nu.$$

Ele projeta quantidades definidas no espaço-tempo sobre o referencial de repouso de v^μ . Com efeito, tem-se:

$$h_{\alpha\beta} h^\beta{}_\nu = h_{\alpha\nu}, \quad \text{e} \quad h_{\alpha\beta} v^\beta = 0.$$

Note que $h_{\mu\nu}$ é um tensor simétrico $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$. Podemos assim descrever a distância entre dois pontos quaisquer P e Q como

$$ds^2(P, Q) = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + (v_\mu dx^\mu)^2.$$

.....

Tensor de energia-momento $T_{\mu\nu}$

Definimos o tensor $T_{\mu\nu}$ a partir de uma lagrangiana de matéria L_m pela relação

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g} L_m}{\delta g^{\mu\nu}}.$$

Podemos representar a distribuição de energia como um fluido escolhendo-se um observador arbitrário possuindo 4-velocidade v^μ , sob a forma

$$T_{\mu\nu} = \rho v_\mu v_\nu - p h_{\mu\nu} + q_{(\mu} v_{\nu)} + \pi_{\mu\nu},$$

onde as 10 componentes independentes, a densidade de energia ρ , a pressão p , o fluxo de calor q^α e a pressão anisotrópica $\pi_{\alpha\beta}$ são dadas pelas relações obtidas pelas projeções de $T_{\mu\nu}$ sobre v^α e no espaço ortogonal. Temos:

$$\rho = T^{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta$$

$$\begin{aligned}
 p &= -\frac{1}{3} h_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} \\
 q^\alpha &= h^{\alpha\beta} v^\gamma T_{\beta\gamma} \\
 \pi^{\alpha\beta} &= h^{\alpha\mu} h^{\beta\nu} T_{\mu\nu} + p h^{\alpha\beta}.
 \end{aligned}$$

Consideremos o vetor v^μ do tipo-tempo normalizado

$$v^\mu v^\nu g_{\mu\nu} = 1$$

A decomposição acima nada mais é do que a separação por um observador arbitrário de velocidade v^μ de um tensor simétrico $T_{\mu\nu}$ em suas partes irredutíveis. Os tensores q_μ e $\pi_{\mu\nu}$ satisfazem os vínculos

$$\begin{aligned}
 q_\mu v^\mu &= 0 \\
 \pi_{\mu\nu} v^\mu &= 0 \\
 \pi_{\mu\nu} g^{\mu\nu} &= 0 \\
 \pi_{\mu\nu} &= \pi_{\nu\mu}
 \end{aligned}$$

Tal decomposição de $T_{\mu\nu}$ não se limita a um fluido especial, mas pode ser realizada indistintamente para qualquer configuração, mesmo se estivermos tratando com energia associada a campos de radiação. Adiante mostraremos como realizar essa decomposição para diferentes campos.

Não-metricidade

Em alguns casos iremos examinar uma generalização da geometria de Riemann introduzida por H. Weyl [8] definida pela condição de não-metricidade:

$$g_{\mu\nu};\lambda = f_\lambda g_{\mu\nu},$$

onde f_λ é um vetor arbitrário. Segue então que a conexão afim é dada por

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} - \frac{1}{2} \left(\delta_\mu^\lambda f_\nu + \delta_\nu^\lambda f_\mu - g_{\mu\nu} f^\lambda \right),$$

onde $\{\lambda_{\mu\nu}\}$ é o símbolo de Christoffel construído com o tensor métrico.

Dualidade

O objeto completamente anti-simétrico de Levi-Civita $\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ tem o valor 1 para índices (0123) ou qualquer permutação par, -1 para permutação ímpar e é nulo para índices repetidos. Podemos construir, a partir dele, o verdadeiro tensor

$$\eta_{\alpha\beta\mu\nu} = \sqrt{-g} \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$$

onde g é o determinante de $g_{\mu\nu}$. Usando esse objeto define-se o dual, para qualquer tensor anti-simétrico $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ pela relação:

$$F^*_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}.$$

Assim,

$$F^{**}_{\mu\nu} = -F_{\mu\nu}.$$

É útil definir a quantidade

$$g_{\alpha\beta\mu\nu} \equiv g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}$$

que satisfaz as simetrias

$$g_{\alpha\beta\mu\nu} = -g_{\alpha\nu\beta\mu} = -g_{\beta\alpha\mu\nu} = g_{\mu\nu\alpha\beta}.$$

Segue então que $g_{\alpha\beta\mu\nu}$ é o dual de $\eta^*_{\alpha\beta\mu\nu}$, i.e.,

$$\eta^*_{\alpha\beta\mu\nu} = -g_{\alpha\beta\mu\nu}$$

e, inversamente,

$$g_{\alpha\beta\mu\nu}^* = \eta_{\alpha\beta\mu\nu}.$$

Note que $\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ é um pseudo-tensor, enquanto $\eta_{\alpha\beta\mu\nu}$ é um verdadeiro tensor, isto é

$$\eta^{\mu\nu\rho\sigma} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g^{\rho\varepsilon} g^{\sigma\lambda} \eta_{\alpha\beta\varepsilon\lambda}.$$

Então tem-se

$$\eta^{\alpha\beta\mu\nu} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}.$$

Iremos usar as diversas contrações do tensor de Levi-Civita que enumeramos abaixo sem demonstração que será deixado como exercício:

$$\eta^{\alpha\beta\mu\nu} \eta_{\rho\sigma\varepsilon\lambda} = -\delta_{\rho\sigma\varepsilon\lambda}^{\alpha\beta\mu\nu},$$

$$\eta^{\sigma\nu\rho\varepsilon} \eta_{\lambda\alpha\beta\varepsilon} = -\delta_{\lambda\alpha\beta}^{\sigma\nu\rho},$$

$$\eta_{\alpha\beta\varepsilon\lambda} \eta^{\sigma\nu\varepsilon\lambda} = -2\delta_{\alpha\beta}^{\sigma\nu},$$

$$\eta^{\sigma\nu\varepsilon\lambda} \eta_{\beta\nu\varepsilon\lambda} = -6\delta_{\beta}^{\sigma},$$

$$\eta^{\alpha\beta\mu\nu} \eta_{\alpha\beta\mu\nu} = -24.$$

onde

$$\delta_{\lambda\alpha\rho}^{\mu\nu\beta} = \det \begin{vmatrix} \delta_{\lambda}^{\mu} & \delta_{\alpha}^{\mu} & \delta_{\rho}^{\mu} \\ \delta_{\lambda}^{\nu} & \delta_{\alpha}^{\nu} & \delta_{\rho}^{\nu} \\ \delta_{\lambda}^{\beta} & \delta_{\alpha}^{\beta} & \delta_{\rho}^{\beta} \end{vmatrix}.$$

Decomposição de um tensor antisimétrico como o tensor de Faraday

Consideremos um observador arbitrário de 4-velocidade normalizada v^μ . Ele pode decompor $F_{\mu\nu}$ em partes elétrica e magnética sob a forma:

$$F_{\mu\nu} = -v_\mu E_\nu + v_\nu E_\mu + \eta_{\mu\nu\rho\sigma} v^\rho H^\sigma,$$

onde os vetores elétrico (E_μ) e magnético (H_μ) são definidos por

$$E_\mu = F_{\mu\alpha} v^\alpha,$$

$$H_\mu = F_{\mu\alpha}^* v^\alpha = \frac{1}{2} \eta_{\mu\alpha\rho\sigma} F^{\rho\sigma} v^\alpha.$$

Segue então que esses vetores estão contidos no 3-espaço ortogonal ao observador de velocidade v^μ , isto é,

$$E_\mu v^\mu = 0 \quad \text{e} \quad H_\mu v^\mu = 0$$

Os seis graus de independência de $F_{\mu\nu}$ são representados pelas quantidades (3 + 3) associadas aos vetores E_μ e H_μ .

Construimos as quantidades escalares invariantes (de gauge) do campo eletromagnético representado pelo tensor de Faraday $F_{\mu\nu}$:

$$F \equiv F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

$$G \equiv F_{\mu\nu}^* F^{\mu\nu}.$$

Tem-se as seguintes identidades algébricas:

$$*F^{\mu\alpha} *F_{\alpha\nu} - F^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu} = \frac{1}{2} F \delta^\mu{}_\nu,$$

$$F^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu} = -\frac{1}{4}G\delta^{\mu}_{\nu},$$

$$F^{\mu}_{\alpha} F^{\alpha}_{\beta} F^{\beta}_{\nu} = -\frac{G}{4} F^{\mu}_{\nu} - \frac{F}{2} F^{\mu}_{\nu},$$

$$F^{\mu}_{\alpha} F^{\alpha}_{\beta} F^{\beta}_{\lambda} F^{\lambda}_{\nu} = \frac{G^2}{16} \delta^{\mu}_{\nu} - \frac{F}{2} F^{\mu}_{\alpha} F^{\alpha}_{\nu}.$$

Tensor de Weyl

É possível decompor o tensor de curvatura de Riemann $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ em partes irreduzíveis, a saber, suas contrações e o tensor conforme de Weyl $W_{\alpha\beta\mu\nu}$:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = W_{\alpha\beta\mu\nu} + M_{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{1}{6}Rg_{\alpha\beta\mu\nu}$$

onde

$$2M_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} + R_{\beta\nu}g_{\alpha\mu} - R_{\alpha\nu}g_{\beta\mu} - R_{\beta\mu}g_{\alpha\nu}.$$

O tensor de Weyl possui dez componentes independentes, e as restantes dez quantidades do tensor de Riemann são associadas ao tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}$$

e ao escalar de curvatura

$$R = R^{\alpha}_{\alpha}.$$

Como no caso semelhante do tensor de Faraday, as dez componentes independentes do tensor de Weyl são separadas em partes eléctrica e magnética, segundo um observador de velocidade v^{μ} . Escrevemos

$$E_{\alpha\beta} = -W_{\alpha\mu\beta\nu}v^{\mu}v^{\nu},$$

$$H_{\alpha\beta} = -W^*_{\alpha\mu\beta\nu}v^{\mu}v^{\nu}.$$

Segue então que os tensores eléctrico e magnético são simétricos, sem traço e ortogonais ao observador:

$$E_{\mu\nu} = E_{\nu\mu}, \quad E_{\mu\nu}v^\mu = 0 \quad \text{e} \quad E_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 0$$

$$H_{\mu\nu} = H_{\nu\mu}, \quad H_{\mu\nu}v^\mu = 0 \quad \text{e} \quad H_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 0.$$

Dessas simetrias segue que a operação dual independe do par de índices sobre qual atua. Isso não ocorre no caso do tensor de Riemann. Com efeito, a condição para que

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}^* = R_{\alpha\beta\mu\nu}^*$$

caracteriza uma classe de geometrias que chamamos espaço de Einstein:

$$R_{\mu\nu} = \frac{R}{4}g_{\mu\nu}.$$

Com o tensor de Weyl pode-se construir dois invariantes quadráticos, a saber:

$$I_1 \equiv \frac{1}{8} W_{\alpha\beta\mu\nu} W^{\alpha\beta\mu\nu};$$

$$I_2 \equiv \frac{1}{8} W_{\alpha\beta\mu\nu}^* W^{\alpha\beta\mu\nu};$$

As seguintes identidades algébricas valem:

$$W_{\alpha\rho\mu\sigma} W^{\beta\rho\lambda\sigma} - W_{\alpha\rho\mu\sigma}^* W^{*\beta\rho\lambda\sigma} = I_1 \delta_\mu^\lambda \delta_\alpha^\beta$$

$$W_{\alpha\rho\mu\sigma} W^{\beta\rho\mu\sigma} = 2 I_1 \delta_\alpha^\beta.$$

Invariantes de Debever

Além dos dois invariantes I_1 e I_2 podemos construir outros 12 escalares algébricos independentes, usando o tensor de Weyl e o tensor sem traço $C_{\mu\nu}$

$$C_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} R g_{\mu\nu}.$$

É conveniente definir

$$D_{\mu\nu} = W_{\mu\alpha\nu\beta} C^{\alpha\beta}$$

$$D_{\mu\nu}^* = W_{\mu\alpha\nu\beta}^* C^{\alpha\beta}$$

Temos então:

$$I_3 = W^{\alpha\beta\mu\nu} W_{\mu\nu\rho\sigma} W^{\rho\sigma}{}_{\alpha\beta}$$

$$I_4 = W^{\alpha\beta\mu\nu} W_{\mu\nu\rho\sigma} W_{\alpha\beta}^*{}^{\rho\sigma}$$

$$I_5 = C^{\mu\nu} C_{\mu\nu}$$

$$I_6 = C^{\mu\alpha} C_{\alpha\nu} C_{\mu}{}^{\nu}$$

$$I_7 = C^{\mu\alpha} C_{\alpha\nu} C^{\nu\lambda} C_{\lambda\mu}$$

$$I_8 = R$$

$$I_9 = D^{\mu\nu} C_{\mu\nu}$$

$$I_{10} = D^{\mu\nu} D_{\mu\nu}$$

$$I_{11} = D^{\mu\alpha} D_{\alpha\nu} C_{\mu}{}^{\nu}$$

$$I_{12} = D_{\mu\nu}^* C^{\mu\nu}$$

$$I_{13} = D_{\mu\nu}^* D^{\mu\nu}$$

$$I_{14} = D_{\mu\alpha}^* D_{\nu}^{\alpha} C^{\mu\nu}$$

Transformação conforme

Uma transformação conforme consiste no mapa que leva a métrica $g_{\mu\nu}(x)$ em $\tilde{g}_{\mu\nu}(x)$ definida por

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(x^\alpha) = \Omega^2(x^\alpha) g_{\mu\nu}(x^\alpha),$$

onde $\Omega^2(x^\alpha)$ é uma função arbitrária. Tem-se

$$\tilde{g}^{\mu\nu}(x^\alpha) = \Omega^{-2}(x^\alpha) g^{\mu\nu}(x^\alpha),$$

que induz a conexão afim

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} + \frac{1}{\Omega} \left(\Omega_{,\mu} \delta_{\nu}^{\alpha} + \Omega_{,\nu} \delta_{\mu}^{\alpha} - \Omega_{,\lambda} g^{\alpha\lambda} g_{\mu\nu} \right)$$

e o tensor associado de curvatura

$$\tilde{R}^{\alpha\beta}_{\mu\nu} = \Omega^{-2} R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} - \frac{1}{4} \delta^{[\alpha}_{[\mu} M^{\beta]}_{\nu]}$$

onde

$$M^\alpha{}_\beta \equiv 4 \Omega^{-1} (\Omega^{-1})_{,\beta;\lambda} g^{\alpha\lambda} - 2 (\Omega^{-1})_{,\mu} (\Omega^{-1})_{,\nu} g^{\mu\nu} \delta^\alpha_\beta.$$

Os colchetes significam anti-simetrização. Contraindo índices obtemos os correspondentes transformados do tensor de Ricci e do escalar R , respectivamente

$$\tilde{R}^\alpha{}_\mu = \Omega^{-2} R^\alpha{}_\mu - \frac{1}{2} M^\alpha{}_\mu - \frac{1}{4} M \delta^\alpha_\mu$$

$$\tilde{R} = \Omega^{-2} [R + 6 \Omega^{-1} \square \Omega].$$

Finalmente, tem-se que para o tensor de Weyl vale a invariância conforme

$$\tilde{W}^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = W^\alpha{}_{\beta\mu\nu}.$$

Mostre que as equações do eletromagnetismo de Maxwell são invariantes por transformação conforme.

Parâmetros cinemáticos

Considere uma congruência de curvas Γ caracterizada por um campo de velocidades v^μ . Podemos decompor sua derivada em partes irreductíveis pela expressão

$$v_{\mu;\nu} = \frac{\theta}{3} h_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} + a_\mu v_\nu$$

onde além da aceleração $a_\mu \equiv \dot{v}_\mu = v_{\mu;\nu} v^\nu$ definimos o fator de expansão θ , o tensor simétrico sem traço (shear) $\sigma_{\alpha\beta}$ e a vorticidade antisimétrica $\omega_{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} \omega_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} h_{[\alpha}^\mu h_{\beta]}^\lambda v_{\mu;\lambda}, \\ \sigma_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} h_{(\alpha}^\mu h_{\beta)}^\lambda v_{\mu;\lambda} - \frac{1}{3} \theta h_{\alpha\beta}, \\ \theta &= v^\alpha{}_{;\alpha}. \end{aligned}$$

Define-se o vetor de rotação pela expressão

$$\omega^\tau = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta\rho\tau} \omega_{\alpha\beta} v_\rho$$

cuja inversa é dada por

$$\omega_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta\mu\nu} \omega^\mu v^\nu$$

Note que valem as relações

$$\sigma_{\mu\nu} v^\mu = 0$$

$$\omega_{\mu\nu} v^\mu = 0.$$

.....

Evolução do fator de expansão

$$\dot{\theta} + \frac{\theta^2}{3} + 2(\sigma^2 - \omega^2) - a^\alpha{}_{;\alpha} = R_{\mu\nu} v^\mu v^\nu.$$

Evolução do tensor de shear

$$\begin{aligned} h_\alpha^\mu h_\beta^\nu \dot{\sigma}_{\mu\nu} &+ \frac{1}{3} h_{\alpha\beta} [-\omega^2 - 2\sigma^2 + a^\lambda{}_{;\lambda}] + a_\alpha a_\beta + \\ &- \frac{1}{2} h_\alpha^\mu h_\beta^\nu (a_{\mu;\nu} + a_{\nu;\mu}) + \frac{2}{3} \theta \sigma_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\mu} \sigma_\beta^\mu - \omega_\alpha \omega_\beta = \\ &= R_{\alpha\epsilon\beta\nu} v^\epsilon v^\nu - \frac{1}{3} R_{\mu\nu} v^\mu v^\nu h_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

Evolução do tensor de rotação

$$h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} \dot{\omega}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} (a_{\mu;\nu} - a_{\nu;\mu}) \\ + \frac{2}{3} \theta \omega_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\mu} \omega^{\mu}_{\beta} - \sigma_{\beta\mu} \omega^{\mu}_{\alpha} = 0$$

Equações de vínculo

Além das equações que descrevem a evolução dos parâmetros cinemáticos de uma congruência, existem certas relações entre estas quantidades que devem ser satisfeitas independentemente do valor do parâmetro afim sobre a curva $x^{\alpha} = x^{\alpha}(s)$. Essas relações são chamadas equações de vínculo. São elas

$$\frac{2}{3} \theta_{,\mu} h^{\mu}_{\lambda} - (\sigma^{\alpha}_{\gamma} + \omega^{\alpha}_{\gamma})_{;\alpha} h^{\gamma}_{\lambda} - a^{\alpha} (\sigma_{\lambda\alpha} + \omega_{\lambda\alpha}) = R_{\mu\alpha} v^{\mu} h^{\alpha}_{\lambda}$$

$$\omega^{\alpha}_{;\alpha} + 2\omega^{\alpha} a_{\alpha} = 0$$

$$\left[\sigma_{\beta(\alpha} - \omega_{\beta(\alpha)} \right]_{;\gamma} \eta_{\rho)}^{\gamma\beta\epsilon} v_{\epsilon} - \frac{2}{3} \theta v_{(\alpha} \omega_{\rho)} + \\ + 2 a_{(\alpha} \omega_{\rho)} = -\frac{1}{2} R_{\beta\gamma\mu(\alpha} \eta_{\rho)}^{\gamma\beta\epsilon} v^{\mu} v_{\epsilon}$$

onde o símbolo $()$ envolvendo um par de índices significa que eles devem ser simetrizados, ou seja $v_{(\alpha} v_{\beta)}$ deve ser lido como $v_{\alpha} v_{\beta} + v_{\beta} v_{\alpha}$.

A fórmula do determinante

O determinante da matriz representada pelo tensor mixto $\mathbf{T} = T^\alpha_\beta$ pode ser calculada pelo teorema de Cayley-Hamilton que conduz à formula:

$$\det \mathbf{T} = -\frac{1}{4} \left[\text{Tr}(\mathbf{T}^4) - \frac{4}{3} \text{Tr}(\mathbf{T}) \text{Tr}(\mathbf{T}^3) - \frac{1}{2} (\text{Tr}(\mathbf{T}^2))^2 + (\text{Tr}(\mathbf{T}))^2 \text{Tr}(\mathbf{T}^2) - \frac{1}{6} (\text{Tr}(\mathbf{T}))^4 \right].$$

Tetradas

Um sistema de quatro vetores - um do tipo tempo e três do tipo espaço - pode ser um sistema de referências com os quais um dado observador descreve suas medidas. Este conjunto de vetores constitui um sistema de tetradas que denota-se

$$e^A_\mu$$

onde o índice latino (variando de 1 a 4) representa cada um dos vetores e o índice grego representa sua componente vetorial. Escolheremos o vetor e^0_μ como o campo de velocidades de um observador e os demais e^i_μ como vetores do tipo espaço ortonormalizados. Isto é:

$$\begin{aligned} e^0_\mu e^0_\nu g^{\mu\nu} &= 1 \\ e^1_\mu e^1_\nu g^{\mu\nu} &= -1 \\ e^2_\mu e^2_\nu g^{\mu\nu} &= -1 \\ e^3_\mu e^3_\nu g^{\mu\nu} &= -1 \end{aligned}$$

Esta expressão pode ser escrita de forma compacta pela expressão

$$e^A_\mu e^B_\nu g^{\mu\nu} = \eta^{AB}$$

na qual η^{AB} representa o tensor métrico de Minkowski. Podemos definir as tetradas inversas utilizando este tensor para subir e descer índices. Com efeito, temos para as inversas e_A^μ por definição

$$e_A^\mu e_\mu^B = \delta_B^A$$

O conjunto de tetradas pode ser usado para transformar índices de coordenadas $\alpha, \beta, \gamma, \text{etc.}$ em índices de tetrada. Por exemplo, consideremos um vetor Z_α . Obtemos sua componente em tetradas pela contração

$$Z_A = e_A^\alpha Z_\alpha$$

e, em geral, para qualquer tensor $T_{\alpha\beta}$:

$$T_{AB} = e_A^\alpha e_B^\beta T_{\alpha\beta}$$

Assim definido, podemos considerar transformações dos vetores-base das tetradas. Pondo

$$e_A^\mu \longrightarrow \tilde{e}_A^\mu = S_A^B e_B^\mu.$$

Para preservar as propriedades das tetradas (ortonormalidade) impomos que o tensor métrico das tetradas η^{AB} não se altera por esta transformação, isto é,

$$S_A^C \eta_{CD} S_B^D = \eta_{AB}.$$

Reconhecemos assim, que as transformações das tetradas constituem uma rotação de Lorentz. Dessa forma, temos dois tipos de transformações possíveis:

- i) Rotação local de Lorentz que atua nos índices de tetradas (A, B, C, \dots);
- ii) Transformações arbitrárias de coordenadas que atuam nos índices de coordenadas ($\alpha, \beta, \mu, \dots$).

Pequena coletânea de resultados básicos da Cosmologia de Friedmann

O modelo cosmológico de Friedmann pode ser descrito a partir de quatro hipóteses:

- A gravitação é descrita pela teoria da Relatividade Geral com ou sem constante cosmológica;
- Existe um tempo global que permite descrever a geometria do universo em um sistema gaussiano único;
- O universo possui uma geometria espacialmente homogênea e isotrópica;
- A fonte da geometria consiste em um fluido perfeito.

O elemento infinitesimal de comprimento da geometria de Friedmann é dado por

$$ds^2 = dt^2 - A^2(t) \left[d\chi^2 + \sigma^2(\chi) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]$$

Este modelo representa um universo gerado por um fluido perfeito isotrópico, expansionista e irrotacional. Estas propriedades podem ser demonstradas diretamente. Consideremos um observador gaussiano, que se co-move com o fluido, isto é, tal que no sistema de coordenadas (t, χ, θ, ϕ) seu vetor velocidade tenha componentes

$$v^\mu = \delta^\mu_0.$$

Da forma da geometria segue que a evolução deste campo de velocidades é dada por

$$v^\mu_{;\nu} = \frac{\theta}{3} h_{\mu\nu}$$

onde o tensor $h_{\mu\nu}$ é o projetor no 3-espaço perpendicular a v^μ , dado por

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - v_\mu v_\nu,$$

e o parâmetro de expansão θ é a divergência da velocidade:

$$\theta \equiv v^\mu_{;\mu}.$$

Espaços de Einstein, Maxwell e Born-Infeld

É possível em certas situações, através do exame da estrutura geométrica do espaço-tempo especificar a origem material/energética da fonte que gerou a curvatura. Isso pode ser feito em teorias do tipo da Relatividade Geral onde existe uma estrutura algébrica entre o tensor de energia-momento e a curvatura. Alguns autores foram até mesmo ao exagero de considerar um tal procedimento como uma forma de unificação, como por exemplo no chamado programa unificado de Rainich-Wheeler. Um tal programa consistiria em mostrar que, pelo menos no caso da teoria linear de Maxwell seria possível, ao obtermos informação sobre o tensor de Ricci (propriedade algébricas e diferenciais) responder a pergunta: a fonte desta curvatura é um campo de Maxwell?

Infelizmente, esta estrutura não é unívoca e conseqüentemente um tal programa é muito limitado e certamente não merece ser considerado uma unificação. Entretanto, algumas propriedades algébricas do tensor de Ricci permitem singularizar certas formas de distribuição de $T_{\mu\nu}$. Vejamos alguns exemplos.

Espaço de Einstein

Chama-se espaço de Einstein a geometria riemanniana onde o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ satisfaz a condição:

$$R_{\mu\nu} = \Lambda_E g_{\mu\nu}$$

onde

$$\Lambda_E = \frac{R}{4}.$$

Espaço de Maxwell

Chama-se de espaço de Maxwell aquele onde o tensor de Ricci satisfaz a condição:

$$R_{\mu}{}^{\epsilon} R_{\epsilon\nu} = \Lambda_M g_{\mu\nu}$$

onde

$$\Lambda_M = \frac{R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta}}{4}$$

Espaço de Born-Infeld

Vamos chamar de espaços de Born-Infeld uma variedade diferenciável \mathfrak{M}_B de dimensão quatro dotada de uma geometria riemanniana $g_{\mu\nu}$ e um campo eletromagnético articulados pela equações da Relatividade Geral e pela dinâmica de Born-Infeld (sem o termo constante), isto é, de Lagrangiana dada por

$$L = -b^2 \sqrt{U}$$

onde

$$U \equiv 1 + \frac{F}{2b^2}$$

Neste caso, o tensor de energia-momentum se escreve

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{U}} \left(F_{\mu}^{\alpha} F_{\alpha\nu} + \left(\frac{F}{2} + b^2 \right) g_{\mu\nu} \right).$$

Note que como não introduzimos o termo constante na Lagrangiana, aparece uma constante cosmológica no limite assintótico quando o campo for para zero.

O traço é dado por

$$T = \frac{1}{\sqrt{U}} (F + 4b^2)$$

Daí

$$T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{U}} (F_{\mu}^{\alpha} F_{\alpha\nu} - b^2 g_{\mu\nu}).$$

Usando esses resultados nas equações da Relatividade Geral tem-se:

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{\sqrt{U}} (F_{\mu}^{\alpha} F_{\alpha\nu} - b^2 g_{\mu\nu}).$$

Definimos espaço de Born-Infeld aquele onde o tensor de Ricci satisfaz a condição:

$$R_{\mu}^{\epsilon} \left(R_{\epsilon\nu} - \frac{1}{2} R g_{\epsilon\nu} \right) = \Lambda_{BI} g_{\mu\nu}$$

onde

$$\Lambda_{BI} = \frac{1}{4} \left(R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R^2 \right).$$

Espaço de Weyl integrável (WIST)

A não-metricidade do espaço de Weyl é definida pela relação

$$g_{\mu\nu;\lambda} = f_\lambda g_{\mu\nu}.$$

Isso significa que em um transporte paralelo de uma régua de comprimento l ela muda seu valor pela quantidade

$$\delta l = l f_a \delta x^a.$$

Segue então que a conexão que permite obter derivada covariante tem a forma

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha - \frac{1}{2} (\delta_\mu^\alpha f_\nu + \delta_\nu^\alpha f_\mu - g_{\mu\nu} f^\alpha),$$

onde $\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha$ é a conexão de Riemann associada. O Wist é o caso especial em que o vetor f_μ é um gradiente. Essa propriedade garante então que o comprimento não muda em um caminho fechado:

$$\oint \delta l = 0.$$

.....

Geometria de Cartan

Consideremos um espaço-tempo possuindo um tensor métrico do tipo Minkowskiano $g_{\mu\nu}$ e ademais possuindo uma conexão afim $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ que define uma derivada covariante. Essa estrutura será chamada espaço de Cartan. Para um vetor arbitrário W^μ essa derivada se escreve como:

$$W^\mu{}_{;\nu} \equiv W^\mu{}_{,\nu} + \Gamma_{\nu\alpha}^\mu W^\alpha.$$

O tensor de torção $\tau_{\mu\nu}^\alpha$ é dado por

$$\tau_{\mu\nu}^\alpha \equiv \frac{1}{2} (\Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha).$$

Podemos decompor o tensor de torção em suas componentes irreduzíveis como segue:

$$\tau_{\mu\nu}^{\alpha} = L_{\mu\nu}^{\alpha} + \frac{1}{3} (\delta_{\mu}^{\alpha} \tau_{\nu} - \delta_{\nu}^{\alpha} \tau_{\mu}) - \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu}^{\alpha\lambda} \tau_{\lambda}^*$$

A quantidade $\tau_{\mu} = \tau^{\alpha}_{\alpha\mu}$ é o traço e $\tau_{\mu}^* = \tau^{\alpha*}_{\alpha\mu}$ o pseudo-traço. Note que a condição de metricidade é satisfeita, isto é

$$g_{\mu\nu;\alpha} = 0.$$

Em um espaço plano de Minkowski define-se as matrizes constantes γ_{α}^m de uma álgebra de Clifford pela relação

$$\gamma_{\alpha}^m \gamma_{\beta}^m + \gamma_{\beta}^m \gamma_{\alpha}^m = 2 \eta_{\alpha\beta} \mathbb{I}$$

onde \mathbb{I} representa a identidade (no caso, representado por uma matriz 4X4).

Correspondentemente, em um espaço curvo define-se matrizes dependentes de ponto no espaço-tempo $\gamma_{\alpha}(x)$

$$\gamma_{\alpha} \gamma_{\beta} + \gamma_{\beta} \gamma_{\alpha} = 2 g_{\alpha\beta} \mathbb{I}$$

Mostre que podemos escrever

$$\gamma_{\alpha}(x) = e_{\alpha}^A(x) \gamma_A^m$$

onde $e_{\alpha}^A(x)$ constitui uma base de tetradas, isto é, quatro vetores (3 do tipo espaço e um do tipo tempo) que determina uma base completa para vetores arbitrários. Podemos escrever

$$e_{\alpha}^A(x) e_{\beta}^B(x) \eta_{AB} = g_{\alpha\beta}(x).$$

onde os índices latinos (A, B, C, \dots) referem-se ao grupo de simetria de Lorentz e os índices gregos ($\alpha, \beta, \epsilon, \dots$) ao grupo de transformações de coordenadas geral. Mostre então que no índice latino, e_α^A é um vetor de Lorentz e no índice grego é um vetor na variedade arbitrária riemanniana.

Um spinor Ψ^a é definido como uma dada representação (spinorial) do grupo de Lorentz representado por um conjunto de quatro números sob forma de uma coluna. A equação de Dirac é invariante pela transformação

$$\tilde{\Psi}^a = S^a_b \Psi^b$$

onde a matriz \mathbf{S} é constante. Ao fazermos a generalização para transformações dependentes de posição é necessário generalizar a noção de derivada (por que?). Define-se então a derivada covariante sob a forma

$$\nabla_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi - \Gamma_\mu \Psi$$

onde a conexão de Fock-Ivanenko é dada pela forma

$$\Gamma_\alpha = -\frac{1}{8} \left(\gamma^\mu \gamma_{\mu,\alpha} - \gamma_{\mu,\alpha} \gamma^\mu - \Gamma_{\alpha\mu}^\epsilon (\gamma^\mu \gamma_\epsilon - \gamma_\epsilon \gamma^\mu) \right)$$

Como deve se transformar Γ_μ para que essa derivada covariante do spinor seja um verdadeiro vetor (no índice μ) ?

Note que esse exercício acima se resolve de modo análogo ao que ocorre na noção de derivada covariante de um vetor qualquer

$$v_{;\mu}^\alpha = v_{,\mu}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha v^\nu$$

onde se mostra que a lei de transformação da conexão $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ deve ser tal que $v_{;\mu}^\alpha$ seja um verdadeiro tensor.

Em uma métrica riemanniana constroi-se as componentes da álgebra de Clifford dada por

$$\gamma_\alpha \gamma_\beta + \gamma_\beta \gamma_\alpha = 2 g_{\alpha\beta} \mathbb{I}$$

Para que essa geometria seja riemanniana a derivada covariante da métrica deve ser nula. Consequentemente, costuma-se impor para a derivada covariante das γ^α a condição

$$\nabla_\mu \gamma^\alpha = 0.$$

Mostre que essa condição é suficiente, mas não é necessária. Com efeito, considere a expressão

$$\nabla_\mu \gamma_\alpha = [U_\mu, \gamma_\alpha].$$

Mostre que se U_μ é um elemento da álgebra de Clifford segue imediatamente [11] que vale a condição de metricidade ($\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$).

Modelos análogos

Modelos análogos constituem configurações de diferentes formas físicas que são descritos através de alterações da geometria. Exemplos disso foram examinados em questões de ótica, acustica, configurações de campos escalares, vetoriais. Uma revisão deste tema pode ser encontrado em vários textos, como em [12], [13]. Em particular tem sido examinadas geometrias efetivas que imitam configurações típicas das descritas pela relatividade geral em sua interpretação de fenômenos gravitacionais. Vários problemas aqui tratados consideram esses modelos análogos gravitacionais.

3 NUMEROLOGIA: ANÁLISE DIMENSIONAL

Definimos G_N = constante de Newton da gravitação; g_F = constante de Fermi da interação fraca.

$$[G_N] = L^3 M^{-1} T^{-2}$$

$$[g_F] = L^5 M T^{-2}$$

$$[h] = ET = ML^2 T^{-1}$$

$$[e] = M^{1/2} L^{3/2} T^{-1}$$

$$[\text{entropia}(S)] = ML^2 T^{-2} \theta^{-1}$$

$$[\theta] = \text{temperatura}$$

$$[k_B] = E \theta^{-1}$$

$$[\text{campo eletromagnetico}] = M^{1/2} L^{-3/2}$$

Comprimento de Yukawa μ associado a uma massa m :

$$\mu = \frac{\hbar}{m c}$$

- Constante de estrutura fina *eletromagnética*

$$\alpha_E = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137};$$

- Constante de estrutura fina *gravitacional*

$$\alpha_G = \frac{G_N M_{proton}^2}{\hbar c} \approx 5.9 \times 10^{-39};$$

- Constante de estrutura fina para interação *fraca*

$$\alpha_F = \frac{g_w m_e^2 c}{\hbar^3} \approx 3.05 \times 10^{-12}.$$

- Constante de Newton

$$G_N = 6,67 \times 10^{-8} \frac{cm^3}{g \text{ sec}}$$

- Constante de Planck reduzida ($\hbar = h/2\pi$):

$$\hbar \approx 6.6 \cdot 10^{22} MeV$$

$N - 1$

Sabendo que a temperatura e a entropia de um buraco negro depende somente de sua massa e de constantes universais qual a expressão dessa temperatura e dessa entropia?

.....

$N - 2$

Construa um número adimensional com as constantes: e (carga do eletron), G_N , m_e , m_p . Mostre que esse número é aproximadamente a razão entre o tempo atômico ($T_a = e^2/m_e c^3$) e o inverso da constante de Hubble.

.....

$N - 3$

Construa uma quantidade com dimensão de massa, comprimento e tempo usando somente as constantes G_N , \hbar et c .

.....

$$N - 4$$

Considere o sistema de unidades onde

$$c = \text{velocidade da luz} = 1$$

$$\hbar = \text{cte de Planck reduzida} = 1$$

Como ficam, nesse sistema, a dimensionalidade das constantes de Newton G_N , do eletromagnetismo e e de Fermi g_F ? Mostre que nesse sistema de unidades a constante de Fermi da interação fraca é a raiz quadrada da constante de Newton (Struckelberg, 1970 comunicação pessoal).

.....

$$N - 5$$

Considere uma partícula de massa m no interior de uma esfera (a ser identificada com o universo) de massa M_U e raio R_U . Para que ela seja criada/destruída uma quantidade de energia ΔE deve aparecer sob forma de energia potencial gravitacional. Obtenha assim um valor aproximado da constante de Newton gravitacional.

.....

$$N - 6$$

A teoria quântica dos campos (TQC) sugere identificar a constante cosmológica à densidade de energia do vácuo ρ_{PI} . Assim, seu valor "natural" seria dado por

$$\rho_{PI} \approx M_{PI}^4 \frac{c^5}{\hbar^3}$$

onde M_{Pl} é massa de Planck. Em [14] sugeriu-se associar a constante cosmológica Λ como uma quantidade independente e fundamental desse universo à massa do graviton que, como qualquer partícula material no mundo quântico (ver comprimento de Yukawa) seria dada por

$$m_\Lambda = \frac{\hbar \sqrt{|\Lambda|}}{c}.$$

No entanto, o graviton (se existir) não é uma dessas outras inúmeras partículas que conhecemos no mundo quântico: ele é especial. Isso se deve à sua intrínseca relação com a estrutura métrica do espaço-tempo. Desse modo, usando a interação gravitacional através da constante de Newton, é possível construir uma outra quantidade com dimensão de massa com Λ ou seja

$$M_\Lambda = \frac{c^2}{G_N \sqrt{|\Lambda|}}.$$

Você consegue imaginar um significado associado a esses dois valores da massa?

SOLUÇÕES

$N - 1$

$$k_B \Theta = \frac{\hbar c^3}{G_N M}$$

$$S = \frac{k_B G_N M^2}{\hbar c}$$

.....

$N - 2$

$$\frac{e^2}{G_N m_e m_p}$$

.....

$N - 3$

$$M_{Pl} = \left(\frac{c \hbar}{G_N} \right)^{1/2} \approx 10^{-5} g;$$

$$L_{Pl} = \left(\frac{G_N \hbar}{c^3} \right)^{1/2} \approx 10^{-33} cm;$$

$$T_{PI} = \left(\frac{G_N \hbar}{c^5} \right)^{1/2} \approx 10^{-43} \text{ seg.}$$

.....

$$N - 4$$

Com efeito, todas as quantidades físicas são escritas em unidades de L (comprimento) como por exemplo

$$[G_N] = L^2$$

$$[g_\omega] = L^2$$

Nesse sistema de unidades a constante de Newton e a de Fermi da interação fraca possuem a mesma dimensionalidade. Isso não ocorre com a constante de interação eletromagnética (E. Stuckelberg, 1970).

No sistema em questão tem-se:

$$G_N \approx 10^{-66} L^2,$$

$$g_F \approx 10^{-33} L^2.$$

.....

$$N - 5$$

Temos [15].

$$mc^2 = \frac{GM_U m}{R_U}$$

ou seja

$$\frac{1}{G} \approx \frac{M_U}{R_U c^2}$$

usando valores

$$\frac{M_U}{R_U c^2} = \frac{10^{56}}{10^{28} \cdot 10^{21}} \approx 10^7.$$

Compare com o valor da constante de Newton

$$\frac{1}{G_N} \approx \frac{1}{6,7 \times 10^{-8}} \approx 10^7.$$

.....

$$N - 7$$

Escreva M_Λ da seguinte forma equivalente

$$M_\Lambda = \frac{\Lambda c^4}{G_N} \frac{1}{\sqrt{|\Lambda|^3}} \frac{1}{c^2}.$$

Sob essa forma pode-se distinguir três termos distintos:

- A densidade de energia gravitacional gerada por Λ ;
- O segundo termo $|\Lambda|^{-\frac{3}{2}}$ é associado ao volume do universo restrito a seu horizonte $H_0^2 \approx |\Lambda|^{-1}$;
- O terceiro termo converte a energia total em uma massa.

Assim, pode-se interpretar M_Λ como a massa total de todos os gravitons no interior do universo observável e escrevemos

$$M_\Lambda = N_g m_\Lambda,$$

onde N_g se interpreta como o número total de gravitons no interior do horizonte observável.

Dai segue que

$$\frac{\rho_{PI}}{\rho_{\Lambda}} \approx \frac{c^7}{\hbar G_N^2} \frac{G_N}{c^4 |\Lambda|}.$$

Igualmente obtemos da razão das duas massas

$$N_g = \frac{c^3}{\hbar G_N |\Lambda|}.$$

Consequentemente o argumento convencional da distinção fantasticamente grande entre ρ_{PI} e ρ_{Λ} em geral associado ao numero

$$\frac{\rho_{PI}}{\rho_{\Lambda}} \approx N_g \approx 10^{120}$$

tem, nessa argumentação uma origem comum com uma eventual quantidade N_g de supostos gravitons no universo. Note que essa argumentação não requer explicitar a teoria da gravitação.

4 RELAÇÕES ESPECIAIS

RE – 1

Mostre as seguintes relações

$$W_{\alpha\beta\mu\nu} W^{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu} - 2 R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \frac{1}{3} R^2;$$

$$W_{\alpha\beta\mu\nu}^* W^{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\alpha\beta\mu\nu}^* R^{\alpha\beta\mu\nu};$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}^* R^{\alpha\beta\mu\nu} = -W_{\alpha\beta\mu\nu} W^{\alpha\beta\mu\nu} + 2 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{2}{3} R^2.$$

ou seja,

$$R^{\mu\nu\alpha\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta}^* = -R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu} + 4 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - R^2.$$

RE – 2

Mostre que para o tensor de Weyl vale a relação

$$W_{\alpha\beta\mu\nu}^* = W_{\alpha\beta\mu\nu}.$$

Em que condições essa simetria vale também para o tensor de curvatura? Isto é, em quais tipos de geometrias vale a relação

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}^* = R_{\alpha\beta\mu\nu}$$

RE - 3

Mostre que $I \equiv F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^*$ é um invariante topológico construído com o campo de Maxwell.

RE - 4

A partir das duas identidades

$${}^*F^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu} - F^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu}^* = \frac{1}{2} F \delta^\mu{}_\nu$$

$$F^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu}^* = -\frac{1}{4} G \delta^\mu{}_\nu,$$

mostre que podemos escrever as seguintes relações

$$F^\mu{}_\alpha F^\alpha{}_\beta F^\beta{}_\nu = -\frac{G}{4} {}^*F^\mu{}_\nu - \frac{F}{2} F^\mu{}_\nu$$

$$F^\mu{}_\alpha F^\alpha{}_\beta F^\beta{}_\lambda F^\lambda{}_\nu = \frac{G^2}{16} \delta^\mu{}_\nu - \frac{F}{2} F^\mu{}_\alpha F^\alpha{}_\nu.$$

.....

RE – 5

Mostre que

$$\eta^{\alpha\beta\mu\nu} \eta_{\alpha\epsilon\lambda\rho} = -\delta_{\epsilon\lambda\rho}^{\beta\mu\nu}$$

$$\eta^{\alpha\beta\mu\nu} \eta_{\mu\nu\rho\sigma} = -2\delta_{\epsilon\lambda\rho}^{\rho\sigma}$$

$$\eta_{\alpha\sigma\mu\nu} \eta^{\beta\sigma\mu\nu} = -6\delta_\alpha^\beta$$

.....

RE – 6

Defina

$$g_{\alpha\beta\mu\nu} \equiv g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu}$$

Daí seguem as propriedades

$$g_{\alpha\beta\mu\nu} = -g_{\alpha\beta\nu\mu} = -g_{\beta\alpha\mu\nu} = g_{\mu\nu\alpha\beta}$$

Mostre que

$$\eta_{\alpha\beta\mu\nu}^* = -g_{\alpha\beta\mu\nu}.$$

.....

RE – 7

Mostre que a identidade de Bianchi pode ser escrita sob a forma

$$R_{\alpha\beta\mu}{}^{\nu}{}_{;\nu} = R_{\mu\alpha;\beta} - R_{\mu\beta;\alpha}.$$

.....

RE – 8

Mostre que P e χ definidos abaixo são invariantes topológicos:

$$P = \int \sqrt{g} R^{\alpha\beta\mu\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu}^* d^4x$$

$$\chi = \int \sqrt{g} R^{\mu\nu\alpha\beta} R_{\mu\nu\alpha\beta}^* d^4x$$

.....

RE – 9

Tensores elétrico e magnético

O tensor de Weyl $W_{\alpha\beta\mu\nu}$ que possui 10 graus de liberdade (por que?) pode ser decomposto [16] em suas partes elétrica ($E_{\mu\nu}$) e magnética ($H_{\mu\nu}$) definidas por um observador de velocidade v^μ pelas relações

$$E_{\mu\nu} = W_{\alpha\mu\beta\nu} v^\alpha v^\beta$$

$$H_{\mu\nu} = W_{\alpha\mu\beta\nu}^* v^\alpha v^\beta.$$

Os tensores $E_{\mu\nu}$ e $H_{\mu\nu}$ possuem, cada um, somente 5 graus de liberdade. Mostre isso.

.....

RE – 10

Escreva o tensor de Weyl em termos de suas partes elétrica e magnética.

.....

RE – 11

Mostre que valem as relações:

$$W^{\mu\nu\alpha\beta} W_{\mu\nu\alpha\beta} = 8 (E_{\alpha\beta} E^{\alpha\beta} - H_{\alpha\beta} H^{\alpha\beta})$$

$$W^{\mu\nu\alpha\beta} W_{\mu\nu\alpha\beta}^* = 16 E_{\alpha\beta} H^{\alpha\beta}$$

$$W^{\alpha\beta\mu\nu} W_{\mu\nu\rho\sigma} W^{\rho\sigma}_{\alpha\beta} = 16 (-E_{\alpha\rho} E^{\rho\beta} E_{\beta}^{\alpha} + 3 H_{\alpha\rho} H^{\rho\beta} E_{\beta}^{\alpha})$$

$$*W^{\alpha\beta\mu\nu} W_{\mu\nu\rho\sigma} W^{\rho\sigma}_{\alpha\beta} = 16 (H_{\alpha\rho} H^{\rho\beta} H_{\beta}^{\alpha} - 3 E_{\alpha\rho} E^{\rho\beta} H_{\beta}^{\alpha})$$

RE - 12

Escreva as equações de Maxwell

$$F^{\mu\nu}_{;\nu} = J^{\mu}$$

$$*F^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$$

em termos das projeções geradas por um observador de velocidade normalizada v^{μ} . Use as definições

$$E_{\mu} = F_{\mu\nu} v^{\nu}$$

$$H_{\mu} = F_{\mu\nu}^* v^{\nu}.$$

Considere as projeções geradas por produtos de cada uma das duas equações de Maxwell respectivamente por v^{μ} e $h^{\mu\nu}$ onde $h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - v^{\mu} v^{\nu}$ é o projetor no tri-espaço ortogonal ao campo de velocidades.

.....

RE - 13

Calcule a velocidade \vec{v} que um observador deve ter para que os vetores \vec{E} e \vec{B} sejam paralelos [17]. Mostre que devemos ter

$$\vec{v} = \vec{n} \tanh \alpha$$

onde

$$\vec{n} \tanh 2\alpha = \frac{2 \vec{E} \times \vec{B}}{\vec{E}^2 + \vec{B}^2}$$

.....

RE - 14

Equações quase-maxwellianas ou JEK

Mostre que as equações da relatividade geral podem ser escritas de modo equivalente usando as identidades de Bianchi sob a forma [18], [19], [20]:

$$W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} = -\frac{\kappa}{2}(T^{\mu\alpha;\beta} - T^{\mu\beta;\alpha}) + \frac{\kappa}{12}(g^{\mu\alpha} T^\beta - g^{\mu\beta} T^\alpha)$$

onde

$$T^\alpha = g^{\alpha\beta} T_{,\beta}$$

e aqui, como nesse texto, a virgula significa derivada ou seja

$$T_{,\alpha} \equiv \frac{\partial T}{\partial x^\alpha}.$$

RE – 15

As equações da relatividade geral e suas flutuações

Em [21] o físico russo V. L. Ginzburg sugeriu tratar as equações de Einstein como um modelo microscópico implicando que campos macroscópicos conteriam flutuações $\delta g_{\mu\nu}$ em torno da métrica média:

$$g_{\mu\nu} = \langle g_{\mu\nu} \rangle + \delta g_{\mu\nu}.$$

Devido às flutuações a métrica média satisfaria equações modificadas dadas por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -T_{\mu\nu} + \Phi_{\mu\nu}$$

O lado esquerdo é construído com $\langle g_{\mu\nu} \rangle$, o tensor $\Phi_{\mu\nu}$ depende das flutuações e Ginzburgo op.cit. supõe que é possível desenvolver $\Phi_{\mu\nu}$ como uma série na geometria média. Aplicando esse modo de tratar a dinâmica gravitacional nas equações JEK podemos escrever

$$W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} = J^{\alpha\beta\mu} + Q^{\alpha\beta\mu}$$

onde

$$J^{\alpha\beta\mu} \equiv -\frac{\kappa}{2}(T^{\mu\alpha;\beta} - T^{\mu\beta;\alpha}) + \frac{\kappa}{12}(g^{\mu\alpha} T^{\beta} - g^{\mu\beta} T^{\alpha})$$

Considere o caso de um campo fraco, no background de Minkowski, tal que as flutuações possam se escrever fenomenologicamente como [22] [23]

$$Q^{\alpha\beta\mu} = q(v^{\alpha} E^{\beta\mu} - v^{\beta} E^{\alpha\mu})$$

Tem-se então

$$W^{\alpha\beta\mu\nu}{}_{;\nu} = q(v^{\alpha} E^{\beta\mu} - v^{\beta} E^{\alpha\mu})$$

Note a semelhança, no eletromagnetismo de Maxwell, dessa corrente

$$J^{\alpha\beta\mu} = v^{\alpha} E^{\beta\mu} - v^{\beta} E^{\alpha\mu}$$

com uma corrente em um meio condutor

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \sigma F^{\mu\nu} v_{\nu}$$

na qual a corrente eletromagnética tem a forma

$$J^{\mu} = \sigma E^{\mu}.$$

Escreva as equações JEK de um campo fraco, no background de Minkowski, projetadas para o observador $v^{\mu} = \delta_0^{\mu}$ obtendo a equação de uma onda gravitacional se propagando na geometria de Minkowski em um estado de tensão gerado pela corrente gravitacional acima.

RE – 16

Obtenha a equação de evolução da expansão, do shear e da vorticidade a partir da definição do tensor de curvatura

$$v_{\alpha;\beta;\gamma} - v_{\alpha;\gamma;\beta} = R_{\alpha\epsilon\beta\gamma} v^{\epsilon}$$

Considere as projeções ao longo do campo de velocidades e no espaço ortogonal usando o projetor $h_{\mu\nu}$.

RE – 17

Considere a geometria dada por

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left(d\chi^2 + \sigma^2(\chi)[d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2] \right)$$

Calcule as funções $a(t)$ e $\sigma(\chi)$ para que essa geometria não tenha curvatura.

.....

RE – 18

Calcule o tensor de energia do campo eletromagnético se sua lagrangiana é dada por

$$L = L(F)$$

onde $F = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$

.....

RE – 19

Em outro exercício mostramos que a ação construída com o invariante

$$G = F_{\mu\nu}^* F^{\mu\nu}$$

dada por

$$\int \sqrt{-g} G$$

é um invariante topológico. Qual a expressão de seu tensor de energia?

RE - 20

Mostre que o tensor de Weyl satisfaz as identidades [16]

$$W_{\alpha\beta\mu}{}^{\nu} W^{\alpha\beta\mu}{}_{\tau} = A \delta_{\tau}^{\nu}$$

$$W_{\alpha\beta\mu}{}^{\nu} {}^*W^{\alpha\beta\mu}{}_{\tau} = B \delta_{\tau}^{\nu}$$

SOLUÇÕES

RE – 2

Da definição de dual

$$W_{\alpha\beta\mu\nu}^* = \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} W^{\gamma\delta}_{\mu\nu}$$

Tomando o dual no outro par

$$W_{\alpha\beta\mu\nu}^{**} = \frac{1}{4} \eta_{\alpha\beta}{}^{\epsilon\lambda} \eta_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} W_{\epsilon\lambda\rho\sigma}$$

Usando a identidade

$$\eta^{\alpha\beta\epsilon\lambda} \eta_{\mu\nu\rho\sigma} = -\delta_{\mu\nu\rho\sigma}^{\alpha\beta\epsilon\lambda} = - \begin{vmatrix} \delta_{\mu}^{\alpha} & \delta_{\mu}^{\beta} & \delta_{\mu}^{\epsilon} & \delta_{\mu}^{\lambda} \\ \delta_{\nu}^{\alpha} & \delta_{\nu}^{\beta} & \delta_{\nu}^{\epsilon} & \delta_{\nu}^{\lambda} \\ \delta_{\rho}^{\alpha} & \delta_{\rho}^{\beta} & \delta_{\rho}^{\epsilon} & \delta_{\rho}^{\lambda} \\ \delta_{\sigma}^{\alpha} & \delta_{\sigma}^{\beta} & \delta_{\sigma}^{\epsilon} & \delta_{\sigma}^{\lambda} \end{vmatrix}$$

encontra-se o resultado acima.

Quanto à condição

$$R_{\alpha\beta\nu\mu}^* = R_{\alpha\beta\mu\nu}^*$$

vale para os espaços de Einstein onde

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}.$$

RE – 3

Usando

$$F_{\mu\nu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu},$$

segue

$$\begin{aligned} \int \sqrt{-\eta} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^* d^4x &= 2 \int \sqrt{-\eta} F^{\mu\nu} A_{\mu,\nu}^* d^4x = \\ &= 2 \int \sqrt{-\eta} (F_{\mu\nu}^* A^\mu)_{,\nu} d^4x. \end{aligned} \quad (4.1)$$

RE - 9

Das propriedades do tensor de Weyl segue imediatamente

$$E_{\mu\nu} = E_{\nu\mu}$$

$$E_{\mu\nu} v^\mu = 0$$

$$E_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 0.$$

$$H_{\mu\nu} = H_{\nu\mu}$$

$$H_{\mu\nu} v^\mu = 0$$

$$H_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 0.$$

RE - 10

$$W^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} + N_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} - H_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}$$

onde

$$E_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} \equiv 2 v_{\alpha} E_{\beta}{}^{\mu} v^{\nu} - 2 v_{\beta} E_{\alpha}{}^{\mu} v^{\nu} - 2 v_{\alpha} E_{\beta}{}^{\nu} v^{\mu} + 2 v_{\beta} E_{\alpha}{}^{\nu} v^{\mu}$$

$$N_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} \equiv \delta_{\alpha}^{\mu} E_{\beta}{}^{\nu} - \delta_{\beta}^{\mu} E_{\alpha}{}^{\nu} - \delta_{\alpha}^{\nu} E_{\beta}{}^{\mu} + \delta_{\beta}^{\nu} E_{\alpha}{}^{\mu}$$

$$H_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu} \equiv \eta_{\alpha\beta\lambda\sigma} (v^{\lambda} v^{\nu} H^{\sigma\mu} - v^{\lambda} v^{\mu} H^{\sigma\nu}) + \eta^{\mu\nu\lambda\sigma} (v_{\lambda} v_{\beta} H_{\sigma\alpha} - v_{\lambda} v_{\alpha} H_{\sigma\beta})$$

RE - 12

$$E_{;\alpha}^{\alpha} + E^{\alpha} \dot{v}^{\alpha} + 2\omega^{\mu} H_{\mu} = -\rho \quad (4.2)$$

onde

$$\rho \equiv J^{\mu} v_{\mu}$$

Para um observador geodésico e irrotacional, encontramos o resultado convencional

$$\text{div } \vec{E} = -\rho$$

Segunda Projeção

$$F_{\mu}{}^{\nu}{}_{;\nu} h^{\mu\lambda} = J_{\mu} h^{\mu\lambda}$$

Desenvolvendo o lado esquerdo (LE):

$$\begin{aligned} LE &= -(v_{\alpha} E^{\beta})_{;\beta} h^{\alpha\lambda} + (v^{\beta} E^{\alpha})_{;\beta} h^{\alpha\lambda} + (\eta_{\alpha\beta}^{\mu\nu} v_{\mu} H_{\nu})_{;\beta} h^{\alpha\lambda} \\ &- \left(\sigma^{\lambda\beta} + \frac{1}{3} \Theta h^{\lambda\beta} + \omega^{\lambda\beta} \right) E_{\beta} + \Theta E^{\lambda} + \dot{E}_{\alpha} h^{\lambda\beta} + \eta^{\alpha\beta\mu\nu} v_{\mu} H_{\nu;\beta} h_{\alpha}{}^{\lambda} \\ &+ \eta^{\alpha\beta\mu\nu} \omega_{\mu\beta} H_{\nu} h_{\alpha}{}^{\lambda} + \eta^{\alpha\beta\mu\nu} v_{\beta} \dot{v}_{\mu} H_{\nu} h_{\alpha}{}^{\lambda} \end{aligned}$$

Usando

$$\eta^{\alpha\beta\mu\nu} \omega_{\mu\beta} H_{\nu} = -2\omega^{\alpha} H_{\alpha} v^{\lambda}$$

segue

$$\dot{E}_{\alpha} h^{\lambda\beta} - \left(\sigma^{\lambda\beta} - \frac{2}{3} \Theta h^{\lambda\beta} + \omega^{\lambda\beta} \right) E_{\beta} + \eta^{\lambda\beta\mu\nu} v_{\mu} H_{\nu;\beta} + \eta^{\lambda\beta\mu\nu} v_{\beta} \dot{v}_{\mu} H_{\nu} = J_{\mu} h^{\mu\lambda} \quad (4.3)$$

De um modo equivalente obtemos o outro par de equações:

$$H_{;\alpha}{}^{\alpha} + H^{\alpha} \dot{v}^{\alpha} - 2\omega^{\mu} E_{\mu} = 0. \quad (4.4)$$

$$\dot{H}_{\alpha} h^{\lambda\beta} + \left(\sigma^{\lambda\beta} - \frac{2}{3} \Theta h^{\lambda\beta} + \omega^{\lambda\beta} \right) H_{\beta} - \eta^{\lambda\beta\mu\nu} v_{\mu} E_{\nu;\beta} - \eta^{\lambda\beta\mu\nu} v_{\beta} \dot{v}_{\mu} E_{\nu} = 0. \quad (4.5)$$

$$RE - 14$$

Impondo que a métrica satisfaça as equações da relatividade geral sobre uma hipersuperfície Σ mostre que essas equações são propagadas para além de Σ , para toda a variedade pela condição de Bianchi mostrando que as equações de Einstein passam a ser válidas em todo domínio do espaço-tempo [18].

.....

$$RE - 15$$

Um cálculo direto dará:

$$E_{j,i}^i = 0.$$

$$H_{j,i}^i = 0.$$

$$\dot{H}^{ij} + \frac{1}{2} E_{m,l}^i \epsilon^{jml} + \frac{1}{2} E_{m,l}^j \epsilon^{iml} = 0$$

$$\dot{E}^{ij} - \frac{1}{2} H_{m,l}^i \epsilon^{jml} + \frac{1}{2} H_{m,l}^j \epsilon^{iml} = -q E^{ij}.$$

Re-arranjando essas equações tem-se a equação de propagação da onda gravitacional dada por

$$\ddot{E}^{kl} - \nabla^2 E^{kl} = -q \dot{E}^{kl}.$$

.....

RE – 16

Veja em [6]

.....

RE – 17

Trata-se da geometria de Milne, escrita em um sistema de coordenadas do tipo universo de Friedmann:

$$ds^2 = dt^2 - t^2 (d\chi^2 + \sinh^2(\chi)[d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2])$$

.....

RE – 18

$$T_{\mu\nu} = -4 L_F F_{\mu}^{\alpha} F_{\alpha\nu} - L g_{\mu\nu}$$

.....

RE – 19

Usando

$$\delta G = \frac{1}{2} G g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$$

segue que a expressão do tensor de energia definido como

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g} G}{\delta g^{\mu\nu}}$$

se anula para essa Lagrangiana. Como era de se esperar (por que?).

5 GEOMETRIAS ESPECIAIS

GE – 1

Escreva, no sistema de coordenadas gaussiano, a métrica de Schwarzschild dada no sistema de coordenadas esférico como

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_H}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_H}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2.$$

.....

GE – 2

Mostre que na geometria de Scharzschild

$$\vec{\xi} = \xi^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \quad \text{com} \quad \xi^\alpha = (1, 0, 0, 0)$$

é um vetor de Killing.

.....

$GE - 3$

Inversão de massa ou Mirror Universe

Considere a métrica

$$ds^2 = \frac{1}{z+1} dt^2 - n^2 \frac{z+1}{z^4} dz^2 - n^2 \frac{(z+1)^2}{z^2} (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

- **Mostre que no domínio de z entre $(-\infty, \infty)$ ela satisfaz a equação da relatividade geral sem matéria $R_{\mu\nu} = 0$. Essa geometria tem somente um único ponto singular. Onde?**
- **Essa geometria é estática e esfericamente simétrica. Ela deve ser então equivalente à métrica de Schwarzschild. Qual a transformação de coordenadas que a leva para a forma convencional de Schwarzschild no sistema (t, r, θ, φ) ?**
- **Essa geometria é invariante pela transformação**

$$n \rightarrow -n.$$

Mostre que essa simetria equivale a uma inversão de massa.

.....

$GE - 4$

Considere as métricas da forma

$$ds^2 = dt^2 + 2h(r) dt d\varphi - dr^2 - dz^2 + g(r) d\varphi^2$$

Calcule as funções $h(r)$ e $g(r)$ para que essa métrica seja plana, isto é, se identifique com a geometria de Minkowski.

.....

GE – 5

Em 1949 Kurt Godel mostrou que uma solução das equações da relatividade geral possuindo constante cosmológica e tendo um fluido perfeito sem pressão como fonte é dada pela forma da métrica anterior onde as funções h e g são dadas por

$$h(r) = \sqrt{2} (\sinh r)^2$$

$$\Delta = \sinh r \cosh r$$

onde $\Delta \equiv \sqrt{h^2 - g}$.

Mostre esse resultado.

.....

GE – 6

A métrica de Godel pode ser posta na forma

$$ds^2 = a^2 \left([dt + h(r) d\varphi]^2 - dr^2 - dz^2 - g^2(r) d\varphi^2 \right)$$

com

$$g = \sinh^2 r (\sinh^2 r - 1)$$

$$h = \sqrt{2} \sinh^2 r$$

onde $a^2 = 4/\omega^2$ e ω é a rotação. Considere as geodésicas $v^\mu = (\dot{t}, \dot{r}, \dot{\phi}, \dot{z})$ onde o ponto significa derivada com respeito ao parâmetro s ao longo da curva. Calcule as integrais primeiras da equação da geodésica. Mostre que uma solução particular é dada por $v^\mu = (1, 0, 0, 0)$.

.....

GE – 7

No exercício anterior, escrevendo a equação da geodésica sob a forma

$$\dot{r}^2 = A_0^2 - V(r)$$

para a variável r , obtenha a forma do potencial e analise o comportamento equivalente de uma partícula submetida a uma força descrita por esse potencial.

.....

GE – 8

Mostre que o potencial V produz um confinamento para todas as trajetórias dentro do cilindro definido por $r \leq r_c$ onde $\sinh r_c = 1$.

.....

GE – 9

Construa um sistema gaussiano de coordenadas para a métrica de Godel de tal modo esse sistema gaussiano valha a partir de um ponto arbitrário O . Escreva a forma completa da métrica nesse sistema gaussiano sob a forma

$$ds^2 = dS^2 - a^2 (\mu^2 - 1) d\chi^2 + a^2 R(S, \chi) d\eta^2 + 2 h a^2 d\chi d\eta - a^2 dz^2$$

Por que ele não vale sobre toda a variedade?

.....

GE – 10

Mostre que o parâmetro μ do exercício anterior que caracteriza o sistema gaussiano pode ser interpretado como o ângulo entre o fluxo de matéria que gera a geometria de Godel e a geodésica que usamos para definir o tempo gaussiano. A velocidade da matéria que gera a métrica de Godel tem a forma

$$v^\mu = \frac{1}{a} \delta_0^\mu$$

que, no sistema de coordenadas gaussiano que construímos no exercício anterior toma a forma

$$\tilde{v}^\mu = \left(\mu, \frac{1}{a}, 0, 0 \right).$$

.....

GE – 11

Chama-se universo de Milne uma parte da geometria de Minkowski descrita pelo elemento de linha dado pela forma

$$ds^2 = dt^2 - t^2 (d\chi^2 + \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)).$$

Considere o observador comovente

$$v^\mu = \delta_0^\mu$$

cujo fator de expansão correspondente é dado por

$$\Theta_m = \frac{1}{t}$$

que diverge para $t = 0$. Em seguida, calcule o fator de expansão da congruência gerada pelos observadores gaussianos q^α do exercício anterior, isto é, $\Theta = q^\alpha_{;\alpha}$. Compare a situação desses caminhantes q^α com os observadores de Milne. Para o observador de Milne a expansão Θ diverge no tempo $t = 0$ mostrando a limitação da geometria de Minkowski descrita por esses observadores. Verifique que uma limitação semelhante ocorre para os observadores gaussianos de Godel.

.....

GE – 12

Mostre que na métrica de Godel, uma partícula que se movimenta sobre uma curva do tipo-tempo fechada, por exemplo, de velocidade dada por

$$e^\mu = \left(0, 0, \frac{1}{a \sinh r \sqrt{\sinh^2 r - 1}}, 0 \right)$$

não pode ser uma geodésica.

Surge a questão: como produzir tal aceleração? Mostre que uma partícula carregada pode seguir esse caminho CTC (fechado no espaço-tempo) sob a ação de um campo magnético fraco (para podermos desprezar seu efeito sobre a métrica de Godel) cuja única componente seja

$$F^{12} = H.$$

Mostre que as equações de Maxwell impõem

$$H = H_0 / \sinh 2r;$$

induzindo a aceleração. Qual o valor de H_0 ?

.....

Comentário extra: Vimos nesses exercicios sobre a métrica de Godel a existência de confinamento associado à limitação de um sistema gaussiano. Poder-se-ia ir além dessa prisão por efeito quântico? Um problema semelhante foi colocado envolvendo a existência de um horizonte na geometria de Schwarzschild e sua possível solução na segunda quantização no background de Schwarzschild. Aqui, podemos pensar o problema já na primeira quantização da seguinte forma [24].

Considerando a equação da evolução da variável r na construção do sistema gaussiano, obtivemos a expressão de uma partícula em um dado potencial $V(r)$. Fazendo a transformação da expressão

$$P_r^2 + D_0^2 + A_0^2 \left(1 - \frac{2}{\cosh^2 r} \right) = 0$$

segundo a prescrição da primeira quantização, isto é,

$$P_r \rightarrow -i \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right)$$

obtenha a equação de Schrodinger

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - D_0^2 + \frac{2A_0^2}{\cosh^2 r} \right) \Psi = A_0^2 \Psi$$

mostre que o comportamento dinâmico de uma partícula na geometria de Godel reduz-se, via equação de Schrodinger ao problema de uma partícula no potencial nuclear Posch-Teller. Com efeito, pondo

$$\Psi = \frac{1}{r} u(r)$$

temos

$$\left| \frac{d^2}{dr^2} + k^2 + \frac{\lambda(\lambda - 1)}{\cosh^2 r} \right| u(r) = 0$$

onde usamos

$$\lambda(\lambda - 1) = 2A_0^2$$

$$k^2 = -(D_0^2 + A_0^2).$$

.....

GE - 13

Tensor de Lanczos

Chamamos tensor de Lanczos [25] o tensor de 3 índices $L_{\alpha\beta\mu}$ tal que

$$L_{\alpha\beta\mu} + L_{\beta\alpha\mu} = 0$$

$$L_{\alpha\beta\mu} + L_{\beta\mu\alpha} + L_{\mu\alpha\beta} = 0$$

ou, equivalentemente

$$L_{\alpha\beta}^{*\beta} = 0.$$

Este tensor de Lanczos é um potencial para o tensor de Weyl $W_{\alpha\beta\mu\nu}$ que pode ser escrito sob a forma

$$W_{\alpha\beta\mu\nu} = L_{\alpha\beta[\mu;\nu]} + L_{\mu\nu[\alpha\beta]} + M_{\alpha\beta\mu\nu} + N g_{\alpha\beta\mu\nu}$$

onde

$$M_{\alpha\beta\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \left\{ L_{(\alpha\nu)} g_{\beta\mu} + L_{(\alpha\beta)} - L_{(\alpha\mu)} g_{\beta\nu} - L_{(\beta\mu)} g_{\alpha\beta} \right\}$$

$$N = \frac{2}{3} L^{\sigma\lambda}_{\sigma;\lambda}$$

$$L_{\alpha\beta} \equiv L_{\alpha}^{\sigma}{}_{\mu;\sigma} - L_{\alpha}^{\sigma}{}_{\sigma;\mu}$$

Sabemos que $W_{\alpha\beta\mu\nu}$ tem 10 componentes independentes. Quantas componentes independentes possui o tensor de Lanczos $L_{\alpha\mu\nu}$?

GE - 14

Mostre que no caso de campo fraco isto é,

$$g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu}$$

com $\varepsilon^2 \ll \varepsilon$

o tensor de Lanczos é dado por

$$L_{\alpha\beta\mu} = \frac{1}{4} \left[h_{\alpha\mu,\beta} - h_{\beta\mu,\alpha} + \frac{1}{6} h_{,\alpha} \eta_{\mu\beta} - \frac{1}{6} h_{,\beta} \eta_{\mu\alpha} \right]$$

Comentário adicional

Considere a forma

$$g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu} + a h_{\mu\nu} + b h^\mu_\alpha h^{\alpha\nu}$$

cuja inversa é dada por

$$g^{\mu\nu} \approx \eta^{\mu\nu} + p h^{\mu\nu} + n h^\mu_\alpha h^{\alpha\nu}$$

Impondo a condição

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} = \delta^\mu_\lambda$$

segue que os parâmetros da métrica devem satisfazer as condições

$$p + a = 0.$$

$$n + b - a^2 = 0.$$

Uma possibilidade seria escolher $b = 0$, $a = 1$ e $n = 1$. Outra possibilidade (mais simétrica) seria escolher $a = 1$, $p = -1$ e $b = n = 1/2$.

.....

Mostre o seguinte Lema:

Se em uma geometria riemanniana existe um campos de observadores v^μ que não tem shear e irrotacional, então a parte magnética do tensor de Weyl se anula (para esses observadores).

.....

GE – 16

Mostre o seguinte Lema:

Se em uma geometria riemanniana existe um campo de observadores v^μ sem shear e irrotacional então o potencial de Lanczos associado pode ser escrito como

$$L_{\alpha\beta\mu} = (a_\alpha v_\beta - a_\beta v_\alpha) v_\mu$$

onde a_α é a aceleração.

.....

GE – 17

Mostre o seguinte Lema:

Se em uma variedade riemanniana existe um campo de observadores geodésicos v^μ irrotacional e tal que

$$\sigma_{\mu}{}^{\nu} \sigma_{\alpha\nu} - \frac{1}{3} \sigma^2 h_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \theta \sigma_{\mu\nu} = 0$$

ou

$$H_{\mu\nu} = 0 \text{ e } \dot{\sigma}_{\mu\nu} + \theta \sigma_{\mu\nu} = 0$$

então o potencial de Lanczos é dado, respectivamente, por

$$L_{\alpha\beta\mu} = \sigma_{\mu\alpha} v_{\beta} - \sigma_{\mu\beta} v_{\alpha}$$

ou, no segundo caso,

$$L_{\alpha\beta\mu} = \frac{1}{3} (\sigma_{\mu\alpha} v_{\beta} - \sigma_{\beta\mu} v_{\alpha})$$

.....

GE – 18

Mostre o seguinte Lema:

Se em uma geometria riemanniana existe uma congruência de geodésicas v^μ , sem shear e sem expansão ($\sigma_{\mu\nu} = 0$, $\Theta = 0$) e tal que seu vetor vorticidade seja constante, isto é,

$$\omega_{\mu;\nu} = 0$$

então o potencial de Lanczos é dado por

$$L_{\alpha\beta\mu} = \frac{2}{9} \left[\omega_{\alpha\beta} v_{\mu} + \frac{1}{2} \omega_{\alpha\mu} v_{\beta} - \frac{1}{2} \omega_{\beta\mu} v_{\alpha} \right]$$

Como um exemplo deste exercício considere a métrica de Gödel em coordenadas euclidianas:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 + 2e^{ax} dt dy + \frac{1}{2} e^{2ax} dy^2 - dz^2$$

Considere o campo de velocidades dado por $v^\mu = \delta_0^\mu$. Calcule sua vorticidade e a partir dela o potencial de Lanczos.

GE – 19

Considere o problema de auto-valor

$$(\Gamma_{\alpha\beta} - \lambda g_{\alpha\beta}) Z^\beta = 0$$

onde $\Gamma_{\alpha\beta}$ é construído com os tensores elétrico e magnético a partir do tensor de Weyl:

$$\Gamma_{\alpha\beta} \equiv E_{\alpha\beta} + i H_{\alpha\beta}$$

É possível a partir da análise dos auto-vetores associados aos correspondentes auto-valores empreender uma classificação do campo gravitacional [26]. Essa classificação é de natureza algébrica e puramente local. As questões que seguem servem para examinar a evolução, em certos casos, dessa classificação [27].

1. Mostre que para uma classe de observadores Υ de velocidade v^μ que não possuem shear, se dois auto-valores de $E_{\alpha\beta}$ coincidem em um dado ponto de Υ então eles coincidem ao longo de Υ .

2. Se um auto-vetor L_α de $E_{\alpha\beta}$ é um vetor de Killing então a variação da densidade de matéria ρ ao longo de L_α mede a variação do correspondente auto-valor ao longo de L_α .

Monopolos elétrico e magnético

A equação de uma partícula carregada de carga e e massa m , chamada monopolo elétrico, se escreve

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = \frac{e}{m} F^{\mu\nu} \frac{dx_\nu}{ds}$$

isto é,

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = \frac{e}{m} E^\mu.$$

Dirac sugeriu, por analogia, definir um monopolo magnético pela equação

$$\frac{d^2 z_\mu}{ds^2} = \frac{g}{m} F_{\mu\nu}^* \frac{dz^\nu}{ds}$$

isto é,

$$\frac{d^2 z^\mu}{ds^2} = \frac{g}{m} H^\mu.$$

Na teoria da gravitação um corpo-teste segue curva geodésica em uma dada métrica. A analogia formal da equação de movimento de uma partícula em um campo gravitacional e um campo elétrico pode ser compreendida em termos do desvio geodético, isto é, a equação de evolução da separação entre duas geodésicas vizinhas. Com efeito, em uma congruência de geodésicas, $\Gamma(s)$, a conexão entre duas curvas vizinhas dada pelo vetor (de conexão) η^μ satisfaz a equação

$$\frac{D^2}{Ds^2} \eta^\alpha = E^\alpha_\mu \eta^\mu.$$

Se a curvatura contraída $R_{\mu\nu}$ é nula, então E^α_μ é a parte elétrica do tensor de Weyl. Que propriedades deve ter uma congruência de curvas aceleradas $\Gamma^a(s)$ para que a conexão entre duas curvas vizinhas π^α satisfaça a equação

$$\frac{D^2}{Ds^2} \pi^\alpha = \mathfrak{f} H^\alpha_\mu \pi^\mu.$$

Chamamos monopolo elétrico gravitacional [28] aos primeiros (matéria ordinária, cuja trajetória é uma geodésica); aos segundos, chamamos monopolo magnético gravitacional por analogia com as definições equivalentes no caso do campo elétrico. Seja $z^\alpha(s)$ a curva do monopolo magnético gravitacional. Qual a força gravitacional que atua sobre o monopolo magnético gravitacional ?

.....

GE – 20

Seja Z^α um vetor de conexão de duas curvas vizinhas de uma congruência de curvas aceleradas. Chama-se campo de Jacobi generalizado aquele onde esse vetor satisfaz a equação

$$\frac{D^2}{Ds^2} Z^\alpha = \mathfrak{N}^\alpha_\beta Z^\beta.$$

onde $\mathfrak{N}^\alpha_\beta$ é uma função polinomial do tensor de curvatura. Qual o comportamento da aceleração em termos de $\mathfrak{N}^\alpha_\beta$?

.....

GE – 21

Mostre que se o shear e a vorticidade de uma curva de vetor tangente u^α são nulos então uma transformação conforme não altera essa propriedade. Mostre que uma curva geodésica é transformada, por esse mapa, em uma curva acelerada.

.....

GE – 22

Considere o tensor de Bel-Robinson definido pela relação [29]

$$2 T^{\alpha\beta\mu\nu} \equiv W^{\alpha\rho\mu\sigma} W^{\beta\nu}_{\rho\sigma} + W^{*\alpha\rho\mu\sigma} W^{*\beta\nu}_{\rho\sigma}$$

Calcule a projeção

$$U = T_{\alpha\beta\mu\nu} v^\alpha v^\beta v^\mu v^\nu$$

em termos dos tensores $E_{\mu\nu}$ e $H_{\mu\nu}$ dados na base do campo de velocidades v^μ .

GE – 23

Mostre que a métrica de Kasner que se escreve sob a forma:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dx^2 - b^2(t)dy^2 - c^2(t)dz^2$$

com

$$a(t) = t^{p_1}$$

$$b(t) = t^{p_2}$$

$$c(t) = t^{p_3}$$

é solução das equações da relatividade geral no vazio. Essa é uma solução particularmente curiosa pois representa um universo sem nenhuma forma de matéria e energia possuindo uma geometria anisotrópica e singular. Quais são os valores das constantes p_1, p_2, p_3 ?

Estágio do vazio: Lifshitz, Belinski e Khalatnikov mostraram que na vizinhança da singularidade a matéria tem um papel menos dominante que a curvatura. É o famoso teorema BKL que encontramos no exercício a seguir.

Mostre que a presença de matéria como um fluido perfeito é menos importante que os termos de curvatura nas equações da relatividade geral, quando na vizinhança da singularidade $t = 0$. Use a lei de conservação para obter a dependência temporal da matéria. Mostre que os termos de matéria que aparecem nas equações da relatividade geral são uma ordem mais baixa em $1/t$ do que os termos mais importantes da geometria (que são da ordem $1/t^2$).

$$GE - 24$$

Considere a teoria descrita pela lagrangiana [30]

$$L = \frac{1}{\kappa} R - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - R W_{\mu} W^{\mu}$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\nu} W_{\mu} - \partial_{\mu} W_{\nu}.$$

Considere a solução dada por

$$W^{\mu} = (W(t), 0, 0, 0)$$

gerando a métrica

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dx^2 - b^2(t)dy^2 - c^2(t)dz^2$$

Calcule W, a, b, c que são somente funções do tempo gaussiano.

.....

Geometria de deSitter GE – 25

Considere a métrica espacialmente homogênea e isotrópica de de Sitter que satisfaz a equação

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0.$$

Mostre que os seguintes expressões são formas equivalentes dessa métrica e exiba as transformações de coordenadas correspondentes que levam de uma forma às outras:

$$(1) \quad ds^2 = \frac{1}{\cosh^2(Hr)} (dt^2 - dr^2) - \frac{\tanh^2(Hr)}{H^2} [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2]$$

onde $H^2 \equiv \Lambda/3$.

$$(2) \quad ds^2 = \cosh^2 r dt^2 - dr^2 - (\sinh r)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

$$(3) \quad ds^2 = dT^2 - \cos^2 T (d\chi^2 + \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2))$$

ou, com

$$d\eta = \frac{1}{\cos T} dT$$

$$ds^2 = \cos^2 T [d\eta^2 - d\chi^2 - \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]$$

$$(4) \quad ds^2 = \left(1 - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

$$(5) \quad ds^2 = d\tau^2 - e^{2HT} [dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)].$$

.....

Friedmon GE – 26

Considere o universo fechado de Friedmann dado por

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega^2)$$

onde $0 < \chi < \pi$. A área da superfície 2-dimensional é dada por

$$S = a(t)^2 \sin^2 \chi.$$

Essa área cresce até $\chi = \pi/2$ e depois decresce. Quando χ atinge o valor π esse modelo se torna fechado. Zeldovich e Novikov sugeriram a proposta de um universo semi-fechado. Para realizar essa ideia eles restringiram o domínio da variável χ de zero até $\pi - \delta$ onde δ é um valor pequeno. Construíram, a seguir, uma continuação analítica para além desse valor máximo de χ , em uma métrica assintoticamente plana. Isso gerou a possibilidade de tratar uma continuação externa de um universo do tipo Friedmann a partir da qual M. A. Markov construiu seus "friedmons"[31]. Construa uma tal configuração.

GE – 27

Considere a forma da métrica dada por

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}.$$

Note que essa forma não é uma aproximação mas sim uma forma exata. Escreva a forma covariante definida pela relação inversa

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\alpha} = \delta_{\alpha}^{\mu}.$$

GE – 28

Dada a métrica

$$g^{\mu\nu} = a \eta^{\mu\nu} + b \phi^{\mu\nu}$$

qual a condição que o tensor $\phi^{\mu\nu}$ deve satisfazer para que a inversa $g_{\mu\nu}$ seja também um binômio, isto é,

$$g_{\mu\nu} = A \eta_{\mu\nu} + B \phi_{\mu\nu}$$

onde $\phi_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} \phi^{\alpha\beta}$. Calcule A et B.

.....

GE – 29

Considere a geometria estática no sistema de coordenadas (t, r, θ, φ) dada por

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - \sigma^2(r) d\Omega^2$$

onde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$.

Mostre que na relatividade geral, essa geometria é gerada pela distribuição de energia de um campo escalar Φ que satisfaz a equação de Klein-Gordon

$$\nabla_{\mu} \nabla^{\mu} \Phi = 0.$$

Qual o valor do campo Φ ? Qual o valor da função $\sigma(r)$? Essa geometria descreve um universo não homogêneo com uma singularidade. Onde se situa a singularidade?

Note: $\sigma^2(r) = r^2 - a^2$, onde a é uma constante [32].

.....

GE – 30

Calcule os vetores de Killing da métrica de Godel. Use o sistema de coordenadas gaussiano (incompleto)

.....

GE – 31

Considere a métrica em coordenadas cilíndricas na forma

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - \gamma^2 \sin^2(r/\gamma) d\varphi^2 - dz^2.$$

Essa geometria satisfaz as equações da relatividade geral com constante cosmológica [33] tendo como fonte um fluido gerado por uma densidade ρ , pressão isotrópica p e pressão anisotrópica $\pi_{\mu\nu}$ tal que $\pi_{11} = \pi_{22} = -\pi_{33}/2$. Usando as condições de junção de Darmois (continuidade da métrica e de sua derivada normal à superfície de separação Σ dada por $r = r_b$) mostre que a região externa tem a geometria dada por

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - \alpha^2 r^2 d\varphi^2 - dz^2.$$

Mostre que a compatibilidade das duas geometrias requer $\alpha^2 < 1$, exibindo o que se chamou defeito topológico [34].

GE – 32

Considere a geometria dada por [35]

$$ds^2 = A^2 dt^2 - B^2 dr^2 - c^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

onde A, B, C são funções das coordenadas r e t . Calcule as equações essas três funções devem satisfazer para serem soluções do sistema acoplado das equações da relatividade geral e do campo do neutrino.

Mostre que a simetria esférica não é compatível com neutrinos tendo helicidade definida mas é compatível com um fluxo de neutrinos de ambas helicidades.

Sugestão: considere que o campo do neutrino tenha a forma

$$\psi = f(\theta) \begin{pmatrix} \phi \\ \sigma^1 \phi \end{pmatrix}$$

onde ϕ (spinor de duas componentes) é função das coordenadas t, r .

Note

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

.....

GE – 33

Considere a métrica dada por

$$ds^2 = dt^2 + 2A dt dy + \frac{A^2}{2} dy^2 - dx^2 - dz^2$$

onde

$$A = A_0 e^{c \times (\theta_0 t + 1)}.$$

Calcule qual a fonte dessa geometria que satisfaz as equações da relatividade geral. Compare com a métrica de Godel.

.....

GE – 34

Considere a métrica

$$ds^2 = dt^2 - a_0^2 \left(d\chi^2 + \sigma^2(\chi)[d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2] \right)$$

onde a_0 é uma constante. Calcule a função $\sigma(\chi)$ para que ela seja solução das equações da relatividade geral modificada por Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -T_{\mu\nu}$$

com

$$T_{\mu\nu} = \rho \delta_\mu^0 \delta_\nu^0.$$

Esse foi o primeiro modelo cosmológico (Einstein).

Mostre que essa geometria é instável.

(Note: para mostrar a instabilidade use a lei de conservação da energia e a equação de evolução da expansão.)

GE – 35

Esse exercício foi proposto por Ugo Moschella.

Dada uma esfera de equação

$$(x_0)^2 + (x_1)^2 + (x_2)^2 = 1.$$

escreva a equação das geodésicas. Obtenha a expressão da curva para uma dada escolha de condições iniciais. Mostre que as geodésicas são os círculos

máximos. Usando em seguida a invariância por rotação, obtenha as geodésicas para condições iniciais genéricas.

2) Repetir o exercício precedente para a variedade de de Sitter

$$(x_0)^2 - (x_1)^2 - (x_2)^2 - (x_3)^2 - (x_4)^2 = -1$$

e também para o caso anti-de Sitter

$$(x_0)^2 - (x_1)^2 - (x_2)^2 - (x_3)^2 - (x_4)^2 = 1$$

para as geodésicas do tipo tempo e nula. Nesses casos, qual o análogo dos círculos máximos?

3) Tendo em conta o fato de que as geodésicas se obtenham (em qualquer dos três casos acima) por interseção da variedade com um plano passando no centro geométrico, determine uma parametrização da geodésica por um método puramente geométrico.

SOLUÇÕES

$$GE - 1$$

A forma gaussiana se escreve

$$ds^2 = d\tau^2 - h^2(\tau, \varrho) d\varrho^2 - r^2(\tau, \varrho) d\Omega^2.$$

Um sistema gaussiano de coordenadas institui uma separação entre espaço e tempo definido pelas condições [36]

$$g_{00} = 1;$$

$$g_{0i} = 0.$$

A escolha do tempo gaussiano é feita a partir da seleção de uma congruência de curvas geodésicas do tipo tempo. Um modo sistemático de produzir um sistema gaussiano pode ser feito através do seguinte procedimento:

- Selecione um dado conjunto de geodésicas do tipo tempo;
- Escreva a equação de Hamilton-Jacobi associada à métrica em questão, isto é

$$g^{\mu\nu} \partial_\mu S \partial_\nu S = 1.$$

- A sua solução se identifica com um tempo gaussiano;
- As demais coordenadas espaciais são obtidas a partir do tempo gaussiano $S(x^\mu, \lambda^i)$ pelas derivadas

$$\tilde{x}^i = \frac{\partial S}{\partial \lambda^i}.$$

No caso em questão, vamos escolher observadores radiais em queda livre ($\theta = \text{constante}$, $\varphi = \text{constante}$) isto é,

$$v^\mu = (\dot{t}, \dot{r}, 0, 0) = \left(\frac{E}{1 - r_H/r}, \sqrt{E^2 - 1 + r_H/r}, 0, 0 \right).$$

Para que essa geodésica (mostre que esse vetor é tangente a uma curva geodésica) tenha, no sistema gaussiano componentes

$$\tilde{v}^\mu = \delta_0^\mu$$

deve-se usar a transformação

$$r = \left(-\frac{3}{2} \sqrt{r_H} (\tau + \varrho) \right)^{2/3};$$

$$t = \tau + r_H \left(\ln \left(\frac{\sqrt{r} + \sqrt{r_H}}{\sqrt{r} - \sqrt{r_H}} \right) - 2 \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r_H}} \right)$$

Segue a expressão

$$ds^2 = d\tau^2 - \frac{r_H}{r} d\varrho^2 - r^2 d\Omega^2$$

onde devemos substituir r pela expressão acima em função de ϱ, τ .

GE - 3

Podemos associar essa métrica à de Schwarzschild fazendo o mapa

$$r = n \frac{z+1}{z}.$$

O domínio $(-\infty < z < -1)$ equivale à região interna $(0 < r < n = 2m)$ e a região externa $(2m < r < \infty)$ equivale ao domínio $(0 < z < \infty)$ onde se deve fazer a identificação topológica $Z(-\infty) \equiv Z(\infty)$.

A região $(-1 < z < 0)$ que corresponde à região $0 < r < \infty$ equivale a uma solução de Schwarzschild com massa negativa. A invariância da métrica na

transformação de inversão de massa não é preservada na passagem da variável z para a variável r .

Note que a singularidade na variável z ocorre para $z = -1$. No ponto $z = 0$ que corresponde ao infinito de r não existe singularidade e pode-se continuar a estender o domínio da variável Z com a interpretação de que se penetra na região onde o sinal da massa deve ser invertido.

.....

$GE - 4$

A solução é dada por:

$$h = h_0 = \text{constante}$$

$$g(r) = h_0^2 - \omega^2 r^2.$$

.....

Comentário adicional: Na métrica de Minkowski é possível construir um sistema gaussiano completo que seja válido para toda a variedade. Isso não é possível na métrica de Godel. Os próximos exercícios permitirão entender as causas dessa limitação.

.....

GE – 6

Segundo [24] [37]temos:

$$\dot{t} = A_0 \left(1 - \frac{2 \sinh^2(r)}{\cosh^2(r)} \right) + \frac{\sqrt{2} B_0}{\cosh^2(r)},$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\sqrt{2} A_0}{\cosh^2(r)} - \frac{B_0}{\sinh^2 r \cosh^2 r},$$

$$\dot{r} = A_0^2 - D_0^2 - \left(\frac{\sqrt{2} A_0 \sinh r}{\cosh r} - \frac{B_0}{\sinh r \cosh r} \right)^2$$

$$\dot{z} = C_0.$$

.....

GE – 7

A solução é dada por

$$V(r) = \left(\sqrt{2} A_0 \frac{\sinh r}{\cosh r} - \frac{B_0}{\sinh r \cosh r} \right)^2 + D_0^2.$$

.....

GE – 8

Ver em [38]

.....

GE – 9

Seguindo os passos estabelecidos em exercicio anterior, procuramos a equação associada de Hamilton-Jacobi. Nesse caso

$$\frac{(\sinh^2 r - 1)}{\cosh^2 r} \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \frac{2\sqrt{2}}{\cosh^2 r} \frac{\partial S}{\partial t} \frac{\partial S}{\partial \varphi} + \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{\sinh^2 r \cosh^2 r} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 + a^2 = 0.$$

Procurando solução sob a forma

$$S = \lambda_1 t + \lambda_2 \varphi + \lambda_3 z + F(r)$$

onde os λ_i são constantes. Mostre que se tem por integração direta

$$F(r) = \frac{\sqrt{P}}{2} \arcsin \left(\frac{(Q - 2PX)}{\sqrt{Q^2 - 4P\lambda_2^2}} \right) - \lambda_2^2 \arcsin \left(\frac{(QX - 2\lambda_2^2)}{X\sqrt{Q^2 - 4P\lambda_2^2}} \right) + \frac{\sqrt{Q + P + \lambda_2^2}}{2} \arcsin M$$

onde

$$M = \frac{(Q + 2P)X + Q - 2\lambda_2^2}{(X + 1)\sqrt{Q^2 - 4P\lambda_2^2}}$$

$$X = \sinh^2(r)$$

$$P = \lambda_1^2 + \lambda_3^2 + a^2$$

$$Q = 2\sqrt{2}\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1^2 - \lambda_3^2 - a^2.$$

A partir da definição desse novo tempo S obtem-se o sistema gaussiano. Ver detalhes em [24], [39]

Para que esse sistema gaussiano valha a partir de um ponto arbitrário O devemos escolher as constantes como sendo $A_0 = \mu/a$, $B_0 = C_0 = 0$ e $D_0 = 1/a$. Logo,

$$ds^2 = dS^2 - a^2(\mu^2 - 1)d\chi^2 + a^2 R(S, \chi) d\eta^2 + 2ha^2 d\chi d\eta - a^2 dz^2$$

onde a transformação para esse sistema gaussiano é dada por

$$S = \mu a t + \frac{a}{2} \sqrt{\mu^2 + 1} \arcsin \Psi + \frac{\mu a}{\sqrt{2}} \arcsin \Delta$$

$$\chi = t + \frac{\mu}{2\sqrt{\mu^2 + 1}} \arcsin \Psi + \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \Delta$$

$$\eta = \varphi - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin \Delta.$$

e as funções R e h são as que aparecem na métrica de Godel com a substituição da variável r em termos das novas variáveis, isto é

$$R(S, \chi) = -\frac{1}{4} \frac{\mu^2 - 1}{(\mu^2 + 1)^2} (1 - \sin M) [\mu^2 + 3 + (\mu^2 - 1) \sin M]$$

$$h(S, \chi) = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1} (1 - \sin M).$$

onde usamos

$$\sinh^2 r_c = \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2 + 1}$$

$$M = \frac{2}{a} \sqrt{\mu^2 + 1} (S - \mu a \chi).$$

Note que o domínio da validade desse sistema gaussiano é dado por

$$0 \leq r \leq r_c.$$

GE – 10

O campo de velocidades do fluxo de matéria que gera a métrica de Godel tem a forma

$$v^\alpha = \frac{1}{a} \delta_0^\alpha$$

que, no sistema de coordenadas gaussiano que construímos no exercício anterior se escreve

$$\tilde{v}^\mu = \left(\mu, \frac{1}{a}, 0, 0 \right).$$

O vetor geodético que caracteriza o tempo próprio tem, nesse sistema gaussiano a expressão

$$q^\alpha = \delta_0^\alpha.$$

Segue que

$$\mu = v_\alpha q^\alpha,$$

mostrando que o parâmetro μ é determinado pelo ângulo entre a velocidade do observador gaussiano e o fluxo do fluido que gera a métrica de Godel.

.....

GE – 11

O fator de expansão tem a forma

$$\Theta = -2 \frac{\sqrt{\mu^2 + 1}}{a} \tan M$$

onde M é dado em exercício anterior. Essa expansão diverge nos limites de validade do sistema gaussiano exibindo a impossibilidade de estender o sistema gaussiano além de um certo domínio.

GE – 12

A aceleração é dada por [39]

$$a^\mu = \left(0, \frac{\cosh r (2 \sinh^2 r - 1)}{a^2 \sinh r (\sinh^2 r - 1)}, 0, 0 \right).$$

Tem-se

$$H_0 = \frac{2 M c}{e a^3} \frac{\cosh^2 r_0 (2 \sinh^2 r_0 - 1)}{\sinh r_0 (\sinh^2 r_0 - 1)^{3/2}}.$$

Comentário adicional: note que o vetor aceleração é um gradiente. Isso permitirá estabelecer uma forma simples na qual essa curva é descrita como uma

geodésica na geometria de arraste associada no capítulo mais adiante sobre a teoria da relatividade métrica.

GE – 13

O tensor $L_{\alpha\beta\mu}$ por ser anti-simétrico no primeiro par de índices possui 24 componentes independentes. Impondo a condição de traço dual nulo reduz-se a 20. Em geral, usa-se impor condições de gauge que não afetam o tensor de Weyl, dadas por

i) Traço nulo: $L_{\alpha\beta}{}^{\beta} = 0$

ii) Divergência nula: $L^{\alpha\beta\mu}{}_{;\mu} = 0$

GE – 15

Use a equação de vínculo da congruência de curvas e obtenha

$$\frac{1}{2} h^{\epsilon}{}_{(\rho} h^{\alpha}{}_{\sigma)} \eta_{\epsilon}{}^{\beta\gamma\nu} v_{\nu} (\omega_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta})_{;\gamma} - a_{(\rho} \omega_{\sigma)} = -H_{\rho\sigma}$$

GE – 16

Faça a hipótese de que vale essa relação. Note que $H_{\mu} = 0$ pelo Lema anterior. Use a equação de evolução do shear para calcular explicitamente $E_{\mu\nu}$.

GE – 17

Considere o observador geodésico em uma métrica de Schwarzschild

$$v_\mu = \left(1, \frac{A}{B}, 0, 0 \right)$$

onde

$$A = \sqrt{2m/r}$$

$$B = 1 - 2m/r.$$

Calcule o shear. Use o lema anterior para, a partir do shear, obter o tensor de Lanczos.

.....

GE – 20

A equação do monopolo magnético gravitacional é dada pela curva acelerada

$$\frac{d^2 z^\alpha(s)}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dz^\mu}{ds} \frac{dz^\nu}{ds} = F^\alpha$$

A força F^α responsável pela aceleração é dada por

$$F_{\alpha;\mu} = E_{\alpha\mu} + \text{f} H_{\alpha\mu}$$

que satisfaz as propriedades

$$F_\alpha = \nabla_\alpha \Phi$$

$$\square \Phi = 0.$$

$$v^\beta \nabla_\beta F_\alpha = 0,$$

ou seja é constante ao longo do movimento.

GE – 21

Seja o mapa dado por

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(x) = e^{2\psi(x)} g_{\mu\nu}$$

e então

$$\tilde{g}^{\mu\nu}(x) = e^{-2\psi(x)} g^{\mu\nu}$$

Então

$$\tilde{u}^\alpha = e^{-\psi} u^\alpha$$

$$\tilde{E}_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta}$$

$$\tilde{H}_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta}$$

$$\tilde{\theta} = e^{-\psi(x)} \theta - 3(e^{-\psi})_{,\alpha} u^\alpha$$

$$\tilde{\sigma}_{\alpha\beta} = e^\psi \sigma_{\alpha\beta}$$

$$\tilde{\omega}_{\alpha\beta} = e^\psi \omega_{\alpha\beta}.$$

.....

$$GE - 23$$

Tem-se as duas condições sobre as tres constantes:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

$$(p_1)^2 + (p_2)^2 + (p_3)^2 = 1.$$

.....

$$GE - 24$$

Temos as condições

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$$

$$(p_1)^2 + (p_2)^2 + (p_3)^2 + (p_4)^2 = 1.$$

onde

$$1 - W^2 = W_0 t^{p_4}$$

Note que essa expressão representa um espaço de Kasner a cinco dimensões, a quinta dimensão sendo associada ao campo eletromagnético.

GE – 26

Ver solução em [40] e [41].

GE – 27

A forma covariante é dada pela série

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - h_{\mu\nu} + h_{\mu\alpha} h^{\alpha}_{\nu} - h_{\mu\alpha} h^{\alpha\beta} h_{\beta\lambda} + \dots$$

GE – 28

Para termos da expressão

$$g^{\mu\nu} = a \eta^{\mu\nu} + b \Phi^{\mu\nu}$$

que a inversa seja também um binômio, isto é,

$$g_{\mu\nu} = A \eta_{\mu\nu} + B \Phi_{\mu\nu}$$

a condição é

$$\Phi_{\mu\nu} \Phi^{\nu\alpha} = m \delta^{\alpha}_{\mu} + n \Phi^{\alpha}_{\mu}$$

Nesse caso tem-se as relações

$$A = \frac{1}{a}$$

$$B = -\frac{\varepsilon}{a(1 + \varepsilon \Phi^{\alpha}_{\alpha})}$$

onde pusemos

$$\varepsilon \equiv \frac{b}{a}.$$

.....

GE – 32

As equações são

$$R_{\mu\nu} = -i (\bar{\psi} \gamma_\mu D_\nu \psi - D_\mu \bar{\psi} \gamma_\nu \psi) + (\mu \rightarrow \nu)$$

$$\gamma^\mu D_\mu \psi = 0$$

.....

GE – 33

Trata-se de um fluido com fluxo de calor no plano ortogonal ao vetor de rotação possuindo anisotropia. Mostre que essa geometria tende assintoticamente a eliminar suas irregularidades: o fluxo de calor, o shear e a expansão se anulam para valores grandes do tempo [42].

6 MODELOS COSMOLÓGICOS NÃO-SINGULARES

Intróito

No começo dos anos 1960 uma série de teoremas provocaram uma modificação no status da questão singular na teoria da gravitação tornando aceitável pela comunidade científica a presença de uma barreira infinita na representação da geometria do universo. Essa situação conflitava com a descrição convencional. Ver [43] para uma discussão completa dessa questão. Vamos considerar um desses teoremas.

Teorema da singularidade (S. Hawking, 1967)

As quatro afirmações seguintes não podem ser verdadeiras simultaneamente para um dado espaço-tempo \mathbb{M} :

- Existe uma hipersuperfície compacta do tipo espaço (sem fronteira) \mathbb{S} ;
- A divergência Θ dos vetores normais a \mathbb{S} é positiva em todo ponto de \mathbb{S} ;
- $R_{\mu\nu} v^\mu v^\nu \leq 0$ para todo vetor v^μ do tipo tempo ou nulo;
- \mathbb{M} é geodesicamente completo em todas as direções do passado.

Nos modelos simples do tipo cosmologia de Friedmann a aplicação desse teorema implica inevitavelmente a existência de uma singularidade. Em diversos exercícios que são propostos nesse livro, essa singularidade não ocorre. Quais

dessas quatro hipóteses desse teorema você considera mais fraca? Examine nos exemplos não-singulares dos exercícios aqui apresentados qual item desses quatro é violado.

MCNS – 1

Considere o modelo de universo conformalmente plano de métrica dada por

$$ds^2 = dt^2 - C^2(t) \left(\frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 d\Omega^2 \right)$$

onde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$. Essa métrica pode ser escrita sob a forma

$$ds^2 = C^2(\eta) \left(d\eta^2 - \frac{dr^2}{1+r^2} - r^2 d\Omega^2 \right)$$

ou, ainda

$$ds^2 = C^2(\eta) \left(d\eta^2 - d\chi^2 - \sinh^2 \chi d\Omega^2 \right).$$

A fonte dessa geometria, que satisfaz a dinâmica da relatividade geral, é um campo eletromagnético acoplado não minimamente à gravitação controlada pela lagrangiana

$$L = \frac{1}{2\kappa} (1 + \lambda A_\mu A^\mu) R - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}.$$

Qual deve ser o valor do campo A_μ para que essa solução homogênea e isotrópica seja dada pela métrica acima com

$$C^2(t) = a_0^2 + t^2$$

ou, equivalentemente

$$C^2(\eta) = a_0^2 \cosh^2 \eta.$$

Qual o limite assintótico (para $t \rightarrow \pm\infty$) dessa métrica?

MCNS – 2

Considere um campo escalar Φ em interação gravitacional descrita pela relatividade geral cuja dinâmica é dada pela lagrangiana

$$L = \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - \sigma \Phi^4$$

gerando uma métrica da forma

$$ds^2 = a(\eta)^2 [d\eta^2 - d\chi^2 - \sinh^2(\chi) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)].$$

Mostre que se o campo é dado por [44]

$$\Phi = \sqrt{3/\lambda} \frac{f}{a}$$

as equações da relatividade geral e do campo assumem a forma

$$\frac{a''}{a} = 1$$

$$\Phi'' + 2\Phi' \frac{a'}{a} + 2\sigma a^2 \Phi^3 = 0$$

onde x' representa a derivada de x em relação ao tempo conforme η . Compatibilidade dessas equações impõem:

$$\sigma = \frac{\lambda}{6}$$

$$f'' - f + f^3 = 0$$

O fator de escala como função do tempo gaussiano t definido por $\eta = \int \frac{dt}{A(t)}$ tem a forma

$$A(t) = \sqrt{t^2 - L^2}$$

onde L é uma constante. Mostre que das três possíveis soluções para $f = \text{constante}$ a solução trivial ($f = 0$) é instável e as outras duas ($f^2 = 1$) são estáveis.

.....

MCNS – 3

No exercício anterior, escrevendo a equação do campo métrico sob a forma

$$G_{\mu\nu} = -\kappa_{(ren)} T_{\mu\nu}$$

tem-se para a energia no estado fundamental

$$E_{|0\rangle} = -\frac{3L^2}{A^4} < 0$$

que mostra a violação da positividade e que induz, em alguma fase do universo a inversão do sinal da interação gravitacional. Quando, nesse modelo, isso acontece?

.....

MCNS – 4

Considere a teoria de um campo escalar real não minimamente acoplada à geometria pela lagrangiana

$$L = \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} R + \frac{1}{2} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - V(\phi) - \frac{1}{12} R \phi^2 \right],$$

onde $g = \det(g_{\alpha\beta})$, R é o escalar de Ricci e o potencial é dado pela auto-interação

$$V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{2} \sigma \phi^4 - V_0.$$

Calcule as equações de movimento do campo escalar e da geometria.

MCNS – 5

No exercício anterior, mostre que o tensor de energia-momentum do campo escalar tem a forma

$$\tau_{\alpha\beta}(\phi) \equiv \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2 + \sigma \phi^4 \right) g_{\alpha\beta} - \frac{1}{6} \left(\nabla_\alpha \nabla_\beta \phi^2 - \square \phi^2 g_{\alpha\beta} \right) - V_0 g_{\alpha\beta}$$

Questão: esse tensor se conserva? Mostre que pode-se escrever

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = -E_{\alpha\beta}(\phi),$$

onde o tensor conservado de energia-momentum é da forma

$$E_{\alpha\beta}(\phi) \equiv \frac{6\tau_{\alpha\beta}(\phi)}{6 - \phi^2}.$$

Existe alguma solução homogênea do campo escalar tal que corresponda a um estado de vácuo estável, que minimiza E ?

.....

MCNS – 6

Mostre que $E(\phi_0)$, do exercício anterior, exibe três regiões incomunicáveis, duas delas contendo mínimos locais em $\phi_0 = \pm 2\sqrt{V_0}/m$, a outra contendo dois máximos instáveis e um mínimo meta-estável em $\phi_0 = 0$. Calcule o resultado para a equação da métrica quando o campo escalar se encontra nesses estados e mostre que se pode escrever

$$R_{\alpha\beta} = \left(\frac{3m^2\phi_0^2 - 3\sigma\phi_0^4 - 6V_0}{6 - \phi_0^2} \right) g_{\alpha\beta}.$$

Segue então

$$R_{\alpha\beta} = 0.$$

.....

MCNS – 7

Introduzindo matéria na teoria anterior de tal modo que essa matéria nova tenha traço nulo $T = 0$, a solução constante não trivial para Φ que extremiza a densidade de energia $E(\phi)$ continua sendo a mesma obtida anteriormente. Mostre que a dinâmica da geometria se escreve (no estado fundamental do campo escalar):

$$R_{\alpha\beta} = - \left(\frac{3m^2\kappa}{3m^2 - 2\kappa V_0} \right) T_{\alpha\beta}$$

onde exibimos a constante gravitacional explicitamente $\kappa = 8\pi G$. O termo multiplicando o tensor de energia-momentum de matéria ordinária (como por exemplo, um gás de fótons) pode ser visto como uma “renormalização” da constante gravitacional. Ou seja, no regime onde

$$\kappa V_0 > \frac{3}{2}m^2$$

é satisfeita, a interação gravitacional tem seu sinal invertido e se torna repulsiva.

MCNS – 8

Considere a dinâmica descrita pela lagrangiana de um campo escalar B e a gravitação na relatividade geral dada por

$$L = R + L(B)$$

com

$$L(B) = \partial_\mu B \partial^\mu B - V(B)$$

Escreva as equações de movimento variando a ação associada a essa lagrangiana em relação a $g_{\mu\nu}$ e B .

MCNS – 9

No exercício anterior, quando o potencial é da forma

$$V = \frac{1}{2} m^2 B^2 + \frac{1}{4} \sigma B^4$$

pode existir o mecanismo de quebra espontânea de simetria, onde a solução homogênea $B = B_0 = \text{constante} \neq 0$ é um mínimo do potencial. Mostre que nesse caso a distribuição de energia do campo B coincide com uma constante cosmológica.

.....

MCNS – 10

Considere a teoria anterior modificada por um multiplicador de Lagrange ε da forma

$$L = R + \varepsilon L_m$$

onde

$$L_m = \partial_\mu B \partial^\mu B - V(B)$$

com

$$V(B) = \frac{m^2}{2} B^2 + \frac{\sigma}{4} B^4.$$

Mostre que quando existe quebra espontânea de simetria, contrariamente ao caso anterior, o vácuo dessa teoria não gravita.

SOLUÇÕES

MCNS – 1

Fótons não lineares

A forma da geometria é a de um universo espacialmente homogêneo e isotrópico [45], [43]:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)d\sigma^2$$

A fonte desta geometria é o campo eletromagnético em interação não mínima com a gravitação descrito pela lagrangiana (faremos aqui $\kappa = 1$).

$$L = \frac{R}{2} (1 + \beta W_\mu W^\mu) - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

onde fizemos $\kappa = 1$. Seguem daí as equações

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = -2\beta R W^\mu$$

$$(1 + \beta W^2) G_{\mu\nu} = \beta (\square W^2 g_{\mu\nu} - W_{,\mu}{}^{,\nu} - R W_\mu W_\nu) - E_{\mu\nu}$$

onde

$$E_{\mu\nu}$$

representa o tensor de energia de Maxwell:

$$E_{\mu\nu} = F_\mu{}^\alpha F_{\alpha\nu} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}.$$

O traço dará

$$R = -3\beta \square W^2.$$

Daí

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} - 6\beta^2 \square W^2 W^\mu = 0.$$

A não linearidade é uma consequência do acoplamento direto com a curvatura da métrica. Já vimos esse tipo de propriedade acontecer no caso do campo escalar. Vamos procurar por uma solução onde W_μ seja um gradiente:

$$W_\mu = W(t) \delta_\mu^0.$$

Isso implica na condição

$$F_{\mu\nu} = 0.$$

Definindo a quantidade Ω

$$\Omega(t) \equiv 1 + \beta W^2$$

o conjunto de equações reduz-se à forma:

$$3 \frac{\ddot{a}}{a} = - \frac{\ddot{\Omega}}{\Omega}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{2\epsilon}{a^2} = - \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{\Omega}}{\Omega}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{1}{a^2} \left(\frac{\sigma''}{\sigma} + \frac{\sigma'^2 - 1}{\sigma^2} \right) = - \frac{\dot{a}}{a} \frac{\dot{\Omega}}{\Omega}$$

$$\square \Omega = 0.$$

Isto é,

$$\dot{\Omega} = \text{constante } a^{-3},$$

cuja solução é dada por

$$W^2(t) = \left[1 - \frac{t}{a} \right]$$

$$a(t) = \sqrt{t^2 + Q^2}$$

onde Q é uma constante que mede o valor mínimo do fator de escala e fizemos $\beta = -1$. Quando $Q = 0$ o sistema se reduz ao espaço vazio de Minkowski, escrito no sistema de coordenadas de Milne.

.....

Comentário: Considere teoria dada acima, acoplamento não-minimo do campo eletromagnético com a gravitação no esquema da relatividade geral. Definindo as variáveis

$$X = 3 \frac{\dot{a}}{a}$$

$$Z = \frac{\dot{\Omega}}{\Omega}$$

mostre que o sistema dinâmico se reduz às equações [46]

$$\dot{X} = -\frac{1}{3} X^2 + X Z$$

$$\dot{Z} = -Z^2 - X Z$$

Estude as curvas integrais desse sistema e discuta os diversos cenários cosmológicos que ele oferece. Identifique a solução que tratamos acima de um universo eterno (sem singularidade).

.....

MCNS – 2

O modo mais direto de examinar a estabilidade dessas soluções (com f constante) é examinar o sistema planar autônomo associado pondo $x = f$ para obter

$$\frac{dx}{d\eta} = y$$

$$\frac{dy}{d\eta} = x - x^3$$

Os pontos críticos desse sistema são dados por

$$(x_0, y_0) = (0, 0)$$

$$(x_A, y_A) = (-1, 0)$$

$$(x_B, y_B) = (1, 0).$$

Pontos A and B representam soluções estáveis

$$\phi_{(A,B)} = \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} \frac{1}{A}$$

Da equação de $g_{\mu\nu}$ obtem-se o valor da constante L

$$L^2 = \frac{\kappa}{24\sigma}$$

que determina o valor mínimo para o fator de escala.

.....

MCNS – 3

A renormalização da constante de interação se escreve, para esse modelo:

$$\frac{1}{\kappa_{ren}} = \frac{1}{\kappa} - \frac{\phi^2}{6} = \frac{12\sigma t^2 - \kappa/2}{12\sigma\kappa A^2}$$

Ou seja, tem-se a possibilidade de uma gravitação repulsiva:

$$t^2 < \frac{\kappa}{24\sigma} \Rightarrow \kappa_{ren} < 0$$

e, por outro lado,

$$t^2 > \frac{\kappa}{24\sigma} \Rightarrow \kappa_{ren} > 0.$$

.....

MCNS – 4

Temos

$$\left(1 - \frac{1}{6}\phi^2\right) (R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}) = -E_{\alpha\beta} + \frac{1}{6} \left(\nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \phi^2 - \square \phi^2 g_{\alpha\beta} \right) + V_0 g_{\alpha\beta},$$

onde

$$E_{\alpha\beta} \equiv \partial_{\alpha} \phi \partial_{\beta} \phi + \frac{1}{2} \left(\partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi - m^2 \phi^2 + \sigma \phi^4 \right) g_{\alpha\beta}$$

$$\square \phi + m^2 \phi - 2\sigma \phi^3 + \frac{1}{6} R \phi = 0,$$

que pode ser escrita como (mostre)

$$\square \phi + \left(m^2 - \frac{2}{3} V_0 \right) \phi + \left(\frac{1}{6} m^2 - 2\sigma \right) \phi^3 = 0.$$

.....

MCNS – 5

Temos

$$E(\phi_0) = \frac{3m^2\phi_0^2 - 3\sigma\phi_0^4 - 6V_0}{6 - \phi_0^2}.$$

Note que além da solução trivial $\phi_0 = 0$, existem duas outras

$$\phi_0^2 = \frac{6m^2 - 4V_0}{12\sigma - m^2}.$$

Mostre que a solução constante não trivial que minimiza a energia no caso em que $\sigma = m^4/8V_0$, vale

$$\phi_0 = \pm \frac{2\sqrt{V_0}}{m}.$$

.....

MCNS – 8

Tem-se

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -\partial_\mu B \partial_\nu B + \frac{1}{2} L g_{\mu\nu}$$

$$\square B + \frac{1}{2} \frac{\delta V}{\delta B} = 0.$$

.....

MCNS – 9

Com efeito, temos quando $B = B_0$ duas soluções possíveis:

$$B_1 = 0.$$

$$B_V = \sqrt{-m^2/\sigma}$$

onde assumimos $m^2 < 0$ e $\sigma > 0$. Como

$$\frac{\delta^2 V}{\delta B^2} = \frac{\delta V}{\delta B} \frac{\delta V}{\delta B} m^2$$

para o caso B_1 e

$$\frac{\delta^2 V}{\delta B^2} = -2 m^2$$

para o caso B_V Vemos que se $m^2 < 0$ em B_1 existe um máximo e para B_2 um mínimo. Correspondentemente a energia desses estados é dada por

$$T_{\mu\nu} = V g_{\mu\nu}.$$

Logo,

$$T_{\mu\nu}(B_1) = 0$$

$$T_{\mu\nu}(B_V) = -\frac{m^4}{8\sigma} g_{\mu\nu}$$

Logo este estado se identifica com uma constante cosmológica.

.....

WIST

WIST – 1

As equações da relatividade geral podem ser obtidas a partir da hipótese de que a métrica é riemannianna e sua dinâmica se obtém a partir da variação do tensor $g_{\mu\nu}$ na lagrangiana

$$L = R.$$

Considere essa mesma lagrangiana mas ao invés de assumir a priori que a geometria seja riemanniana considere que ela seja afim, isto é, faça a variação independente de $g_{\mu\nu}$ e da conexão $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$. Mostre que essa dinâmica impõem que a métrica seja riemanniana.

.....

WIST – 2

Como fica alterado o resultado anterior se introduzimos matéria acoplada minimamente à geometria? E quando o acoplamento não for mínimo, como por exemplo no caso de interação conforme com um campo escalar?

.....

WIST – 3

Mostre que o escalar de curvatura desse wist pode ser escrito em termos do escalar de curvatura da geometria de Riemann associada e do vetor de Weyl W_λ . Calcule também a expressão da curvatura contraída $R_{\mu\nu}$ em termos dos objetos definidos na geometria de Riemann associada.

.....

WIST – 4

Mostre que o principio variacional (assumindo a priori a geometria riemanniana) para a Lagrangiana quadrática se escreve:

$$\delta \int \sqrt{-g} R^2 d^4x = \int \sqrt{-g} \Upsilon_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x$$

onde

$$\Upsilon_{\mu\nu} = 2R R_{\mu\nu} + 2R_{,\mu;\nu} - 2\nabla_\alpha \nabla^\alpha R g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R^2 g_{\mu\nu}.$$

.....

WIST – 5

Mostre que o principio variacional (assumindo a priori a geometria riemanniana)

para a Lagrangiana de segunda ordem $R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$ se escreve:

$$\delta \int \sqrt{-g} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} d^4x = \int \sqrt{-g} \Delta_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x$$

onde

$$\Delta_{\mu\nu} = 2 R_{\mu\alpha} R_{\nu}^{\alpha} - \frac{1}{2} R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \nabla_{\mu} \nabla^{\mu} R g_{\mu\nu} + R^{\lambda}_{\mu;\nu;\lambda} + R^{\lambda}_{\nu;\mu;\lambda}.$$

.....

WIST – 6

A. Sakharov propôs modificar a dinâmica da Relatividade Geral, quando aplicada à cosmologia, pela forma

$$L_S = R + \alpha R^2 + \beta R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \gamma R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu}$$

Mostre que se α , β e γ são constantes então a dinâmica obtida dessa L_S é equivalente à obtida da forma

$$L_{(1)} = R + aR^2 + b R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$$

onde a e b dependem de α , β e γ .

Mostre também que um universo espacialmente homogêneo e isotrópico essa dinâmica é equivalente à dinâmica obtida pela forma

$$L_{(2)} = R + \lambda R^2.$$

WIST – 7

Um espaço de Weyl integrável é determinado por um tensor métrico e um campo escalar. Considere a transformação

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = e^\chi g_{\mu\nu}$$

$$\varphi \rightarrow \tilde{\varphi} = \varphi + \chi$$

onde χ é uma função arbitrária. Como se transformam, por esse mapa, a conexão e as curvaturas associadas?

WIST – 8

Construa uma dinâmica em um WIST que seja invariante por essa transformação acima. Desenvolva em termos da geometria de Riemann associada e escreva a teoria como em um espaço de Riemann.

WIST – 9

Considere a ação

$$S_{W2} = \int \sqrt{-g} e^{-\varphi} (R + \beta \varphi_{,\mu} \varphi^{,\mu})$$

no espaço de wist. Mostre que ela é invariante sob o mapa conforme

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = e^{-2\varphi} g_{\mu\nu}.$$

Como varia φ ? Re-escreva essa dinâmica em termos das quantidades de Riemann associadas [47].

.....

WIST – 10

Existem três invariantes que podemos construir com as quantidades de um wist possuindo dimensão L^{-2} :

- R ,
- $\omega^\alpha \omega_\alpha$
- $\omega^\alpha{}_{;\alpha}$

onde ω é o campo wist. Escreva a forma mais geral da lagrangiana e obtenha as equações de movimento para ω e o tensor métrico. Escreva essa dinâmica usando a curvatura riemanniana associada.

.....

WIST – 11

Vamos aplicar a teoria wist para produzir um modelo cosmológico.

- Mostre que quando o campo wist for função somente do tempo gaussiano ele dá origem a uma métrica do tipo Friedman $ds^2 = dt^2 - d\sigma^2$ cuja fonte pode ser identificada com um fluido perfeito tal que $p_\omega = \rho_\omega = -\frac{\lambda^2}{2} \dot{\omega}^2$;
- Qual a forma do fator de expansão $a(t)$?

Mostre que é possível gerar graças ao wist um cenário cosmológico com as seguintes características [48]:

- Para valores grandes do tempo cósmico a geometria coincide com o universo (plano) de Milne;
- O universo tem um bouncing, isto é, esse cenário não tem singularidade;
- A fase em contração é acelerada.
- Quando acontece o máximo desvio da geometria riemanniana?
- Examine as propriedades da inversão temporal nesse cenário,
- Mostre que uma integral primeira das equações se escreve $\omega = \frac{\gamma}{2a_0^2} \arccos \left[\frac{a_0}{a} \right]^2$
- A constante γ pode ser positiva ou negativa. Ela pode ser escrita como $\gamma^2 = 6 a_0^4 / \lambda^2$. Qual a consequência de um sinal ou o outro sobre a forma da geometria?

Examine se essas soluções geram cosmologias distintas.

.....

WIST – 12

No exercício anterior defina a variável $\sigma = \dot{\omega}$. Escreva as equações do sistema

(a, σ) e mostre que a evolução do campo σ pode ser descrito como equivalente a um corpo de massa unitária movendo-se no potencial $V(\sigma)$. Qual a forma desse potencial?

WIST – 13

Vimos que o escalar

$$I \equiv R^{\alpha\beta\mu\nu} R^*_{\alpha\beta\mu\nu}$$

é um invariante topológico e que não contribui para a dinâmica da geometria. No entanto é possível construir funcionais de I que podem servir como modificações à dinâmica da gravitação.

Considere [49] a lagrangiana

$$L = R + \beta \sqrt{1 - (I/\beta^2)^2} - \beta + L_m.$$

Calcule as equações de movimento. Mostre que no caso das soluções de Schwarzschild, Godel, Kerr e Friedmann esse termo não contribui, pois para essas geometrias $I = 0$. Nessa teoria o tensor de energia-momento $T^{\mu\nu}$ se conserva?

SOLUÇÕES

WIST – 1

Variando a métrica $\delta g_{\mu\nu}$ obtém-se

$$R_{\mu\nu} = 0.$$

Variando a conexão $\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ obtém-se

$$g_{\mu\nu;\lambda} = 0.$$

.....

WIST – 2

O acoplamento mínimo não altera a propriedade da geometria ser riemanniana. No entanto, acoplamento não mínimo afeta. Considere o caso, por exemplo, de um campo escalar ϕ acoplado da forma que a lagrangiana se escreve

$$L = R \phi^2$$

A variação independente da conexão $\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}$ implica que a geometria é do tipo de Weyl especial (wist) dada por

$$g_{\mu\nu;\lambda} = W_{,\lambda} g_{\mu\nu}.$$

onde

$$W_{,\lambda} = -\frac{\phi_{,\lambda}^2}{\phi^2}.$$

WIST – 3

A definição da derivada covariante em wist é dada por

$$V_{;\mu}^{\alpha} = V_{||\mu}^{\alpha} - \frac{1}{2} (\omega_{\mu} V^{\alpha} - \omega^{\alpha} V_{\mu} + \omega_{\nu} V^{\nu} \delta_{\mu}^{\alpha})$$

onde o simbolo $||$ representa a derivada em Riemann. Tem-se de um cálculo direto:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}^0 - \omega_{\mu||\nu} - \frac{1}{2} \omega_{\mu} \omega_{\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\square^0 \omega - \omega_{\lambda} \omega^{\lambda}).$$

e, conseqüentemente

$$R = R^0 + \frac{3}{2} \omega^{\alpha} \omega_{\alpha} - 3 \square^0 \omega.$$

onde $R_{\mu\nu}^0$ é o escalar de curvatura de Riemann construido com a conexão de Christoffel.

WIST – 7

Temos:

$$\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$$

$$\tilde{R}^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}$$

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}.$$

Ou seja, todas essas quantidades são invariantes. Note entretanto que o mesmo não acontece com o escalar de curvatura:

$$\tilde{R} = e^{-\chi} R.$$

.....

WIST – 8

A ação

$$S_W = \int \sqrt{-g} e^{-\varphi} R$$

é invariante sob aquela transformação. Essa lagrangiana pode ser escrita como

$$S_W = \int \sqrt{-g} e^{-\varphi} (R^0 - 3\Box\varphi + \frac{3}{2}\varphi_{\lambda}\varphi^{\lambda})$$

onde todas as quantidades são construídas no espaço de Riemann associado.

Mostre que essa dinâmica se escreve, a menos de uma divergência total sob a forma

$$S_W = \int \sqrt{-g} e^{-\varphi} \left(R^0 - \frac{3}{2} \varphi_{,\mu} \varphi'^{\mu} \right).$$

.....

WIST – 9

Temos

$$S_W = \int \sqrt{-g} e^{-\varphi} \left[R^0 + \left(\beta - \frac{3}{2} \right) \varphi_{,\mu} \varphi'^{\mu} \right]$$

.....

WIST – 10

Temos

$$S = \int \sqrt{-g} (R + \xi \omega^{\alpha}_{;\alpha})$$

Para eliminar um desses invariantes usamos a identidade

$$R = R^0 + \frac{3}{2}\omega^\alpha \omega_\alpha - 3\omega_{;\alpha}^\alpha$$

Pondo

$$\mathcal{S} = \int \sqrt{-g} [R + \lambda \omega^\alpha \omega_\alpha]$$

onde o parâmetro sem dimensão λ vale

$$\lambda = \frac{3}{2} - 2\xi.$$

Variando independentemente o tensor métrico e o campo ω , temos:

$$\square \omega = 0.$$

onde o operador \square se calcula na geometria riemanniana associada e também

$$R^0_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R^0 g_{\mu\nu} + \nabla_\mu \nabla_\nu \omega - 2(\xi - 1)\nabla_\nu \omega \nabla_\mu \omega + (\xi - \frac{1}{2})\nabla_\alpha \omega \nabla^\alpha \omega g_{\mu\nu} = 0.$$

WIST – 11

Temos para o campo wist, nessas condições:

$$\omega_{,\gamma} = \partial_\lambda \omega(t) = \dot{\omega} \delta_\lambda^0$$

onde o ponto sobre a função significa derivada temporal. Uma primeira integral é obtida imediatamente dando como resultado

$$\dot{\omega} = \gamma a^{-3}$$

onde $\gamma =$ é uma constante. As demais equações da relatividade geral impõem:

$$\dot{a} + \varepsilon + \frac{\lambda^2}{6} (\dot{\omega} a) = 0$$

$$2a \ddot{a} + \dot{a}^2 + \varepsilon - \frac{\lambda^2}{2} (\dot{a})^2 = 0 ,$$

onde $\varepsilon = (0, +1, -1)$ é o valor do parâmetro da tri-curvatura.

Quando $(3-4\xi) = -2\lambda^2 < 0$ obtém-se um universo aberto (i.e., $\xi = -1$). Obtemos então a dinâmica fundamental dada pela equação

$$\dot{a}^2 = 1 - \left[\frac{a_0}{a} \right]^4 ,$$

onde $a_0 = \text{constante} = [\gamma^2 \lambda^2 / 6]^{1/4}$.

Da relação

$$\gamma^{(\pm)} = \pm \sqrt{6} \frac{a_0^2}{|\lambda|}$$

segue

$$\omega^{(\pm)} = \omega_0^{(\pm)} \arccos \left[\frac{a_0}{a} \right]^2$$

Temos, em ambos os casos

$$\rho_\omega = -\frac{\lambda^2}{2} \dot{\omega}^2 = -3 \left[\frac{a_0^4}{a^6} \right]$$

Ou seja, independentemente do sinal das funções de wist $(\omega^{(+)}, \dot{\omega}^{(+)})$ e $(\omega^{(-)}, \dot{\omega}^{(-)})$ elas produzem o mesmo cenário cosmológico. O sistema é invariante por inversão temporal $t \rightarrow (-t)$ se $\omega^{(+)}$ é transformada em $\omega^{(-)}$ – e reciprocamente [48].

.....

WIST – 12

Temos o sistema

$$\dot{\sigma} + 3\gamma a^{-4} \dot{a} = 0.$$

$$a^3 - \gamma \sigma^{-1} = 0.$$

Dai

$$\frac{1}{2}(\dot{\sigma})^2 + V(\sigma) = 0.$$

onde

$$V(\sigma) = \frac{3\lambda^2}{4}(\sigma^4 - b^2 \sigma^{8/3})$$

com

$$b^2 = 6\lambda^{-2}\gamma^{2/3}.$$

.....

WIST – 13

A dinâmica é dada por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} - \frac{\beta^3}{2\sqrt{\beta^4 - I^2}} g_{\mu\nu} - \frac{4}{\beta} \left(\left[\frac{I}{\sqrt{\beta^4 - I^2}} \right]_{,\lambda} R^{\beta}{}_{\mu\nu}{}^{*\lambda} \right)_{;\beta} = -T_{\mu\nu} - \frac{\beta}{2} g_{\mu\nu}.$$

7 CRIAÇÃO DE PARTICULAS PELO CAMPO GRAVITACIONAL

$CP - 1$

Consideremos um campo escalar obedecendo a equação

$$\square\varphi + m^2 \varphi + \xi R \varphi = 0.$$

mergulhado em uma métrica conformalmente plana da forma

$$ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - d\sigma^2)$$

As soluções (com norma positiva) são dadas por [50] [51]

$$\varphi_k(\eta, x^i) = \frac{e^{ik \cdot x}}{a(\eta)\sqrt{(2\pi)^3}} \chi_k(\eta)$$

Mostre que a equação satisfeita por χ é

$$\frac{d^2 \chi_k}{d\eta^2} + (k^2 - V(\eta)) \chi_k = 0.$$

Quanto vale $V(\eta)$?

.....

CP – 2

Considere o caso particular do universo eterno onde assintoticamente (para tempos infinito passado e futuro) a geometria coincide com a forma de Milne, como vimos em capítulo anterior dada por

$$ds^2 = a^2 (d\eta^2 - d\xi^2 - \sinh^2(\xi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)).$$

com

$$a = a_0^2 \cosh^2 \eta.$$

Nesse caso podemos resolver a equação para o campo escalar obtendo (mostre isso) para o infinito passado, a expressão

$$\chi_k(\eta) \sim \chi_k(\eta)^{in}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e^{-i\omega\eta}$$

e no infinito futuro

$$\chi_k(\eta) \sim \chi_k(\eta)^{out}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\alpha_k e^{-i\omega\eta} + \beta_k e^{i\omega\eta})$$

Os coeficientes de Bogoliubov α_k, β_k são dados como na teoria quântica de campos em espaço plano, isto é, dadas duas representações de um mesmo campo escrevendo

$$\varphi = \sum (a_k f_k + a_k^+ f_k^*)$$

ou como podemos, alternativamente, usar uma combinação linear da base f_k tem-se

$$\varphi = \sum (a_k f_k + a_k^+ f_k^*) = \sum (b_k h_k + b_k^+ h_k^*)$$

compatibilidade requer (transformação de Bogoliubov):

$$a_j = \sum (\alpha_{jk}^* b_k - \beta_{jk}^* b_k^+)$$

$$b_k = \sum (\alpha_{jk} a_j + \beta_{jk}^* a_j^+)$$

Mostre que o número de partículas criadas pela expansão se escreve

$$N = \frac{1}{(2\pi a)^3} \int |\beta_k|^2 d^3 k$$

.....

CP - 3

Mostre que em um universo conformalmente plano, o número de ftons é constante, isto é, a densidade dos ftons

$$n = \frac{N}{V}$$

obedece a esquação

$$\dot{n} + n\Theta = 0.$$

onde Θ é o fator de expansão e o acoplamento entre o campo eletromagnético e o gravitacional se dá via interação mínima.

Mostre que, em geral, o campo gravitacional de um universo espacialmente homogêneo e isotrópico não é capaz de criar (ou destruir) partículas que estão associadas a campos que são invariantes por transformação conforme.

CP – 4

Um gas de ftons obedece a estatística cuja função de distribuição é dada por

$$dN_\omega = \frac{1}{\exp(\omega - \mu)/T] - 1}$$

onde o potencial químico do foton $\mu_\gamma = 0$. Essa propriedade está intimamente relacionada à questão anterior. Ou seja, é possível contornar a proibição de criação de ftons por um campo gravitacional cósmico se a interação dos dois campos (gravitacional e eletromagnético) não se dá via acoplamento mínimo.

Considere a lagrangiana do campo eletromagnético dada por

$$L_{em} = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \beta R F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

mostre que o numero de ftons não é preservado e que se tem:

$$\dot{n}(1 - 2\beta R) + n\Theta = 2\beta n(\dot{R} + R\Theta).$$

onde Θ é o parâmetro de expansão.

.....

CP – 5

Suponha [48] que o potencial químico do foton em interação não-minima com campo gravitacional cosmológico tenha a forma fenomenológica

$$\Delta\mu = -b^2\Theta$$

Mostre que o potencial termodinâmico $\Omega = -PV$ se expressa como

$$\Omega = \frac{VT}{\pi^2} \int \omega^2 \ln(1 - \exp(-(\omega - \Delta\mu)/T)) d\omega$$

onde se deve integrar no dominio $(0, \infty)$ e $\Delta\mu$ é dado acima.

.....

CP – 6

Vamos comparar as relações termodinâmicas do foton nos dois casos estudados aqui de interação gravitacional minima e não-minima.

Calcule a energia ρ , pressão p , numero total de fotons N no volume V , a energia livre \mathfrak{F} , a entropia especifica s .

SOLUÇÕES

.....

CP – 1

Temos

$$V = -a^2 \left(m^2 + \left(\xi - \frac{1}{6} \right) R \right).$$

.....

CP – 6

Vamos chamar as quantidades via acoplamento mínimo de X_{HMC} e as de acoplamento não mínimo X_{HDCC} . Temos

$$\rho_{HMC} = \frac{\pi^2}{15} T^4$$

$$\rho_{HDCC} = \frac{6}{\pi^2} T^4 \sum \frac{e^{-m\beta}}{m^4}$$

onde a soma se dá no domínio $1 < m < \infty$.

$$p = \frac{1}{3} \rho.$$

$$N_{HMC} = \frac{2}{\pi^2} \zeta(3) V T^3$$

$$N_{HDCC} = \frac{2}{\pi^2} V T^3 \sum \frac{e^{-m\beta}}{m^3}$$

onde a soma se dá no domínio $1 < m < \infty$.

8 TEORIA DA RELATIVIDADE MÉTRICA

O princípio da relatividade métrica estabelece que o movimento de qualquer corpo cuja trajetória no espaço-tempo de Minkowski é acelerada pode ser descrito como livre de qualquer força em uma geometria associada que chamamos geometria de arraste [52]. Os exercícios desse capítulo irão se concentrar nessa equivalência que podemos sintetizar na frase:

toda aceleração pode ser geometrizada [53].

.....

RM – 1

Mostre o seguinte lema:

Dada uma congruência de curvas aceleradas $\Gamma(v)$ no espaço-tempo de Minkowski tal que o vetor aceleração admita um potencial $a_\mu = \partial_\mu \Psi$, é sempre possível construir uma geometria de arraste da forma

$$\hat{g}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \beta v^\mu v^\nu,$$

tal que suas trajetórias sejam geodésicas na geometria de arraste e

$$1 + \beta = e^{-2\Psi}.$$

.....

$$RM - 2$$

Calcule os valores dos parâmetros cinemáticos na métrica de arraste.

.....

$$RM - 3$$

Mostre, usando a formula do determinante de $\hat{g}_{\mu\nu}$, que a métrica de arraste pode ser escrita sob a forma

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - (1 + \hat{g}) v_{\mu} v_{\nu}.$$

Equivalentemente podemos escrever o potencial da força externa sob a forma:

$$\Psi = \ln \sqrt{-\hat{g}}.$$

.....

RM – 4

Mostre que uma congruência de curvas sem expansão, sem shear e sem vorticidade, com aceleração gerada por uma força que possui um potencial, obedece à dinâmica clássica (newtoniana).

.....

RM – 5

Mostre o seguinte Lema:

Para uma congruência $\Gamma(v)$ de curvas aceleradas no espaço de Minkowski tal que

$$(v_{\mu,\nu} - v_{\nu,\mu}) v^\nu = 0$$

com módulo $N : v_\mu v_\nu \eta^{\mu\nu} = N$, é sempre possível construir uma geometria de arraste cuja métrica tem a forma

$$\hat{g}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \beta v^\mu v^\nu,$$

tal que essas curvas sejam geodésicas na métrica de arraste satisfazendo a condição

$$1 + \beta N = \frac{1}{N}.$$

RM – 6

Considere o caso geral no qual a aceleração não é dada em termos de uma só função. A forma da geometria de arraste requer uma dependência mais geral dada por

$$\hat{g}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + b v^\mu v^\nu + m a^\mu a^\nu + n a^{(\mu} v^{\nu)},$$

onde $a^{(\mu} v^{\nu)} \equiv a^\mu v^\nu + a^\nu v^\mu$. Os três parâmetros b, m, n estão relacionados aos três graus de liberdade do vetor aceleração. Calcule a correspondente forma covariante.

Isso significa que é possível transformar a trajetória de uma partícula submetida a qualquer tipo de força em um movimento geodésico através da mudança da métrica em uma métrica de arraste. Um tal procedimento pode ser entendido como a extensão relativística do princípio de d'Alembert, ou seja, toda aceleração pode ser geometrizada.

RM – 7

Vamos considerar uma partícula acelerada em um sistema girante na métrica de Minkowski. O espaço-tempo de Minkowski escrito no sistema cilíndrico (t, r, ϕ, z)

tem a forma

$$ds^2 = a^2[dt^2 - dr^2 - dz^2 + (h^2 - \omega^2 r^2)d\phi^2 + 2h d\phi dt].$$

Considere o campo de velocidades

$$v^\mu = \frac{1}{a\sqrt{h^2 - \omega^2 r^2}} \delta_2^\mu.$$

Qual a métrica de arraste que leva o corpo com essa velocidade a ser uma geodésica?

.....

RM – 8

No exercício anterior, considere a situação onde $h^2 - \omega^2 r^2 > 0$. Isso permite a presença de CTC (closed time-like curves) na geometria original que são mapeadas em CTC na métrica de arraste. Mostre que existe uma singularidade real no valor $r = h/\omega$ e que \hat{q}_{00} muda de sinal em

$$\omega^2 r_\pm^2 = \frac{h^2 \pm \sqrt{h^4 - 4}}{2}.$$

.....

RM – 9

Até aqui consideramos somente corpos em movimento no espaço-tempo de Minkowski. Vamos agora considerar situações onde o background é curvo, como ocorre nas teorias da gravitação. Vamos mostrar que o método de eliminar a ação de qualquer força sobre um corpo pode ser realizado não somente na geometria plana de Minkowski mas em qualquer geometria riemanniana.

Mostre que a trajetória dada pelo vetor velocidade

$$v_\mu = \sqrt{1 - \frac{r_H}{r}} \delta_\mu^0$$

é acelerada na métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_H}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{r_H}{r}\right)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Calcule então a geometria de arraste que leva esse caminho acelerado a ser uma geodésica. Calcule a curvatura contraída de Ricci da métrica de arraste.

RM – 10

Mostre que a trajetória dada pelo vetor velocidade

$$v^\mu = \left(0, 0, \frac{1}{a \sinh r \sqrt{\sinh^2 r - 1}}, 0\right).$$

é acelerada na métrica de Godel descrita no sistema de coordenadas cilíndrico pela forma

$$ds^2 = a^2[dt^2 + 2h(r) dt d\varphi - dr^2 - dz^2 + g(r) d\varphi^2]$$

onde $h(r) = \sqrt{2} \sinh^2 r$ e $g(r) = \sinh^2 r (\sinh^2 r - 1)$ e a é uma constante relacionada à vorticidade $a = 2/\omega^2$. Calcule então a geometria de arraste que leva esse caminho acelerado a ser uma geodésica.

.....

RM – 11

Calcule as geodésicas na geometria de Gödel e mostre que o domínio $r < r_c$ onde $\sinh^2 r_c = 1$ separa as regiões causal e não-causal (ver [53]). Mostre que isso é devido ao fato de que as geodésicas que atingem o valor $r = 0$ são confinadas a um domínio Ω_i definido por $0 < r < r_c$. Note que o campo gravitacional é finito em $r = r_c$. Mostre que na geometria de arraste a situação é diferente pois em $\sinh^2 r = 1$ existe uma singularidade real na métrica de arraste. Ou seja, somente o domínio exterior é permitido. Isso significa que para essa classe de trajetórias aceleradas em Gödel, a geometria de arraste consiste em toda a região não-causal de Gödel.

.....

RM – 12

Mostre que a trajetória dada pelo vetor velocidade

$$v^\mu = \left(0, 0, 0, \frac{r}{\sqrt{-(r^2 + a^2)^2 + a^2 \Sigma}} \right)$$

no plano equatorial ($\theta = \pi/2$) é acelerada na métrica de Kerr que no sistema de

coordenadas de Boyer-Lindquist tem a forma

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{\rho^2}{\Sigma} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 + \frac{4Mr a \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi - \left[(r^2 + a^2) \sin^2 \theta + \frac{2Mr a^2 \sin^4 \theta}{\rho^2} \right] d\phi^2,$$

onde $\Sigma = r^2 + a^2 - 2Mr$ e $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$. Calcule a aceleração desse campo de velocidades e a geometria de arraste que o torna uma geodésica.

SOLUÇÕES

$RM - 1$

Pomos

$$\eta_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = 1$$

Segue então $a_\mu v^\mu = 0$. A expressão covariante tem a forma

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{\beta}{(1 + \beta)} v_\mu v_\nu.$$

Note que o simbolo chapéu ($\hat{}$) denota objetos na geometria de arraste onde a métrica é $\hat{g}^{\mu\nu}$. A derivada covariante de um vetor arbitrário S^μ nesta métrica é definida por

$$S^\alpha{}_{;\mu} = S^\alpha{}_{,\mu} + \hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} S^\nu,$$

onde a conexão é dada por

$$\hat{\Gamma}^\epsilon_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\eta^{\epsilon\alpha} + \beta v^\epsilon v^\alpha) (\hat{g}_{\alpha\mu,\nu} + \hat{g}_{\alpha\nu,\mu} - \hat{g}_{\mu\nu,\alpha}),$$

Pondo

$$\hat{v}^\mu = \Omega^{-1} v^\mu$$

Então $\hat{v}_\mu \equiv \hat{g}_{\mu\nu} \hat{v}^\nu$. Impondo que \hat{v}^μ tem norma unitária na métrica de arraste implica

$$\Omega = (1 + \beta)^{-1/2}.$$

Para identificar esta congruência gerada por \hat{v}_μ com v_μ devemos impor que Ω seja uma constante do movimento, isto é que ao longo do movimento seja constante ou seja $v^\mu \partial_\mu \Omega = 0$. A congruência $\Gamma(\hat{v})$ é geodésica se

$$\hat{v}_{\mu,\nu} \hat{v}^\nu - \hat{\Gamma}^\epsilon_{\mu\nu} \hat{v}_\epsilon \hat{v}^\nu = 0.$$

onde virgula (,) denota derivada simples. A descrição de uma curva acelerada no espaço plano como uma geodésica na métrica de arraste é dada por

$$\left(v_{\mu,\nu} - \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^{\epsilon} v_{\epsilon} \right) v^{\nu} = 0, \quad (8.1)$$

Lembrando que a aceleração na métrica de fundo é $a_{\mu} = v_{\mu,\nu} v^{\nu}$ podemos escrever a condição da geodésica como

$$\partial_{\mu} \Psi = \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^{\epsilon} v_{\epsilon} v^{\nu}.$$

O lado direito se escreve

$$\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^{\epsilon} v_{\epsilon} v^{\nu} = \frac{1 + \beta}{2} v^{\alpha} v^{\nu} \hat{g}_{\alpha\nu,\mu}$$

obtendo assim a condição requerida:

$$a_{\mu} + \frac{1}{2} \partial_{\mu} \ln(1 + \beta) = 0.$$

.....

RM - 2

O projetor é dado por

$$\hat{h}_{\mu\nu} = \hat{g}_{\mu\nu} - \hat{v}_{\mu} \hat{v}_{\nu}.$$

Logo,

$$\hat{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$$

O fator de expansão

$$\hat{\theta} = \frac{1}{\sqrt{-\hat{g}}} \partial_{\mu} (\sqrt{-\hat{g}} \hat{v}^{\mu})$$

usando

$$\sqrt{-\hat{g}} = \frac{\sqrt{-\eta}}{(1 + \beta)^{1/2}}$$

vale

$$\hat{\theta} = \sqrt{1 + \beta} \theta.$$

Para o shear tem-se

$$\hat{\sigma}_{\mu\nu} = \sqrt{1 + \beta} \sigma_{\mu\nu}$$

e para a vorticidade

$$\hat{\omega}_{\mu\nu} = \frac{\omega_{\mu\nu}}{\sqrt{1 + \beta}}.$$

.....

RM - 4

Use a equação de evolução da expansão para obter

$$\nabla^2 \Psi = 0$$

onde Ψ é o potencial.

.....

RM - 5

Temos

$$N \equiv v_\mu v_\nu \eta^{\mu\nu} \neq 1.$$

Segue, das condições da velocidade que podemos escrever

$$a_\mu = v_{\mu,\nu} v^\nu = \frac{1}{2} \partial_\mu N$$

Pondo para a geometria de arraste a formula

$$\hat{g}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \beta v^\mu v^\nu$$

A condição para que o vetor $\hat{v}_\mu = v_\mu$ seja normalizado é dada por:

$$\hat{v}_\mu \hat{v}^\mu = \hat{v}_\mu \hat{v}_\nu \hat{g}^{\mu\nu} = 1$$

Segue então

$$1 + \beta N = \frac{1}{N}.$$

A equação da geodésica tem a forma

$$\frac{1}{N} v_{\mu,\nu} v^\nu - \frac{1}{2} \hat{g}_{\alpha\beta,\mu} \hat{v}^\alpha \hat{v}^\beta = 0$$

que um cálculo direto implica na condição que permite re-escrever a métrica sob a forma

$$\hat{g}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \frac{(1 - N)}{N^2} v^\mu v^\nu.$$

.....

RM – 6

Tem-se

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + B v_\mu v_\nu + M a_\mu a_\nu + N a_{(\mu} v_{\nu)}$$

onde B, M, N são dados em termos de b, m, n pelas relações

$$B = - \frac{b(1 - m a^2) + n^2 a^2}{(1 + b)(1 - m a^2) + n^2 a^2},$$

$$M = \frac{1}{1 - m a^2} \left(-m + \frac{n^2}{(1 + b)(1 - m a^2) + n^2 a^2} \right),$$

$$N = - \frac{n}{(1 + b)(1 - m a^2) + n^2 a^2}.$$

.....

RM - 7

O observador

$$v^\mu = \frac{1}{a\sqrt{h^2 - \omega^2 r^2}} \delta_2^\mu$$

tem aceleração dada por

$$a_\mu = \left(0, \frac{\omega^2 r}{(h^2 - \omega^2 r^2)}, 0, 0 \right)$$

que é um gradiente

$$a_\mu = \partial_\mu \Psi,$$

onde

$$2\Psi = - \ln(h^2 - \omega^2 r^2).$$

Segue então que a métrica de arraste é dada por

$$\frac{ds^2}{a^2} = \frac{\omega^4 r^4 - \omega^2 r^2 h^2 + 1}{(h^2 - \omega^2 r^2)^2} dt^2 + d\phi^2 + \frac{2h}{h^2 - \omega^2 r^2} d\phi dt - dr^2 - dz^2.$$

.....

RM – 9

A aceleração é dada por

$$a_\mu = \left(0, -\frac{r_H}{2(r^2 - r r_H)}, 0, 0 \right).$$

Ou seja, é um gradiente da função Ψ :

$$\Psi = -\frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{r_H}{r}\right).$$

Usando os lemas estabelecidos anteriormente obtemos a geometria de arraste

$$\hat{ds}^2 = dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{r_H}{r}\right)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

onde o coeficiente b da geometria de arraste é dado por

$$b = -\frac{r_H}{r},$$

As unicas componente não nulas da métrica de arraste $\hat{g}^{\mu\nu}$ são

$$R_1^1 = \frac{r_H}{r^3};$$

$$R_2^2 = R_3^3 = -\frac{1}{2} R_1^1.$$

Mostre que todos invariantes de Debever são finitos, exceto na origem $r = 0$. Como interpretar essa geometria no esquema da relatividade geral?

RM – 10

As componente contravariantes da geometria de Godel são dadas por (mostre)

$$\begin{aligned} g^{00} &= \frac{1 - \sinh^2 r}{a^2 \cosh^2 r}, \\ g^{02} &= \frac{\sqrt{2}}{a^2 \cosh^2 r}, \\ g^{22} &= \frac{-1}{a^2 \sinh^2 r \cosh^2 r}. \end{aligned} \tag{8.2}$$

A aceleração do campo de velocidades em questão é dada por

$$a^\mu = \left(0, \frac{\cosh r [2 \sinh^2 r - 1]}{a^2 \sinh r [\sinh^2 r - 1]}, 0, 0 \right).$$

Ou seja é um gradiente: $a_\mu = \partial_\mu \Psi$, onde

$$\Psi = - \ln(\sinh r \sqrt{\sinh^2 r - 1}).$$

Podemos assim usar os lemas anteriores onde o parâmetro b da geometria de arraste é

$$1 + b = \sinh^2 r (\sinh^2 r - 1).$$

Segue então que a geometria de arraste é

$$\frac{\widehat{ds}^2}{a^2} = \frac{3 - \sinh^4 r}{(\sinh^2 r - 1)^2} dt^2 + d\phi^2 + 2 \frac{\sqrt{2}}{\sinh^2 r - 1} d\phi dt - dr^2 - dz^2.$$

.....

RM – 12

A aceleração é dada por

$$a_\mu = \left(0, -\frac{r^3 - Ma^2}{r^4 + r^2 a^2 + 2Mra^2}, 0, 0 \right).$$

Ou seja, $a_\mu = \partial_\mu \Psi$, onde

$$2\Psi = -\ln \left[-\left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r} \right) \right].$$

O parâmetro b é dado por

$$1 + b = -\left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r} \right),$$

e a geometria de arraste no plano equatorial tem a forma

$$\frac{\widehat{ds}^2}{a^2} = \frac{1}{(1+b)^2} \left(1 - \frac{2M}{r} - b \frac{4M^2 a^2}{r^2} \right) dt^2 + d\phi^2 + \frac{4Ma}{(1+b)r} dt d\phi - \frac{r^2}{\Delta} dr^2.$$

9 MIMETISMO GRAVITACIONAL ASSO- CIADO A CAMPOS ELETROMAGNÉ- TICOS

.....

$DE - 0$

Pequeno resumo da teoria da propagação das discontinuidades pelo método de Hadamard [18].

A descontinuidade $[f]_{\Sigma}$ de uma dada função $f(x^{\alpha})$ através Σ é definida pelo limite

$$[f(x)]_{\Sigma} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (f^{(1)}(x + \epsilon) - f^{(2)}(x - \epsilon)), \quad (9.1)$$

onde Σ é a hipersuperfície de descontinuidade de equação $\Sigma(x^{\mu}) = 0$, e $f^{(1)}$ e $f^{(2)}$ são valores de f nos domínios 1 e 2 separados por Σ . A ideia básica do método é

investigar a compatibilidade entre uma descontinuidade do campo e a estrutura das equações a derivadas parciais. Admite-se que o campo é contínuo através Σ mas em alguma ordem de suas derivadas ela seja descontínua. Consideremos, por exemplo, que a primeira derivada seja descontínua:

$$[f_{,\alpha}]_{\Sigma} \neq 0, \quad (9.2)$$

Mostra-se [54] que as diferenciais da função f em ambos domínios $df^{(1)} = \partial_{\alpha} f^{(1)} dx^{\alpha}$ e $df^{(2)} = \partial_{\alpha} f^{(2)} dx^{\alpha}$ são contínuas. Segue então a relação fundamental

$$[df]_{\Sigma} = [\partial_{\alpha} f]_{\Sigma} dx^{\alpha} = 0$$

o que significa que $[\partial_{\alpha} f]_{\Sigma}$ é ortogonal à hypersuperfície. Em outras palavras, deve existir um escalar $\chi(x)$ tal que

$$[\partial_{\alpha} f]_{\Sigma} = \chi(x) k_{\alpha}$$

onde $k_{\alpha} \equiv \partial_{\alpha} \Sigma$ é o gradiente da superfície de descontinuidade $\Sigma = \text{constante}$.

O tipo de descontinuidade depende da ordem da equação diferencial investigada. No contexto de segunda ordem, derivadas da ordem $D \geq 2$ serão em geral descontínuas. Quando existe uma tal descontinuidade, diz-se que existe uma *onda de choque* em Σ . Esses choques estão sempre presentes quando os campos obedecem equações diferenciais parciais hiperbólicas. Essas descontinuidades se propagam ao longo da superfície Σ de uma forma específica determinada pelas equações de movimento.

.....

Seja o caso do eletromagnetismo de Maxwell. Vamos assumir que o tensor eletromagnético $F_{\mu\nu}$ seja contínuo através de uma hypersuperfície Σ mas sua primeira derivada não o seja, isto é

$$[F_{\mu\nu}]_{\Sigma} = 0,$$

$$[F_{\mu\nu,\lambda}]_{\Sigma} = f_{\mu\nu} k_{\lambda},$$

onde $f_{\mu\nu}$ é um tensor anti-simétrico não nulo. Calculando as descontinuidades das equações de Maxwell no vácuo

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \quad \text{e} \quad F^{*\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$$

através Σ , obtém-se respectivamente

$$f^{\mu\nu} k_\nu = 0,$$

$$f_{\mu\nu} k_\lambda + f_{\nu\lambda} k_\mu + f_{\lambda\mu} k_\nu = 0.$$

Contraindo Eq. acima com k^λ e usando a outra equação resulta

$$g^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = 0$$

isto é,

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial \Sigma}{\partial x^\mu} \frac{\partial \Sigma}{\partial x^\nu} = 0$$

Derivando essa expressão e lembrando que k_μ é um gradiente segue

$$k_{\mu,\lambda} k^\lambda = 0.$$

Chega-se ao resultado que a onda se propaga como geodésica nula na métrica do background.

DE – 1

Consideremos agora a propagação da luz em meios dielétricos em movimento. Neste caso, além do tensor de Faraday $F_{\mu\nu}$, define-se um outro objeto anti-simétrico $P_{\mu\nu}$ representando o campo electromagnético no interior de meios materiais. Esses tensores se expressam em termos dos vetores E^μ e H^ν e das excitações D^μ e B^μ como segue:

$$F_{\mu\nu} = E_\mu v_\nu - E_\nu v_\mu + \eta_{\mu\nu}^{\alpha\beta} v_\alpha B_\beta,$$

$$P_{\mu\nu} = D_\mu v_\nu - D_\nu v_\mu + \eta_{\mu\nu}^{\alpha\beta} v_\alpha H_\beta,$$

onde v^μ é um vetor comoviente com o dielétrico. Assume-se que as propriedades eletromagnéticas do meio são caracterizadas pelas relações constitutivas

$$D_\alpha = \epsilon E_\alpha,$$

$$B_\alpha = \mu H_\alpha,$$

As equações de Maxwell em um meio dielétrico se escrevem [1]:

$$P^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0,$$

$$*F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0.$$

Consideremos o caso em que $\mu \equiv \mu_0 = \text{constante}$ e $\epsilon = \epsilon(E)$, onde $E \equiv \sqrt{-E_\alpha E^\alpha}$. No caso particular em que $\nabla_\nu v^\mu = 0$ escreva essas equações em termos dos vetores D^μ e B^μ .

.....

DE – 2

Definindo o vetor unitário l^μ escreve-se $E^\mu \equiv E l^\mu$, com $l_\alpha l^\alpha = -1$. Usando as condições de Hadamard,

$$[E_{\mu,\lambda}]_\Sigma = e_\mu k_\lambda$$

$$[H_{\mu,\lambda}]_\Sigma = h_\mu k_\lambda.$$

nas equações

$$P^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0,$$

$$*F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0.$$

escreva a relação de dispersão correspondente.

DE – Buraco Negro

Vamos exibir agora uma propriedade notável deste método de análise da propagação dos fótons pela modificação da geometria por onde ele se propaga com alguns exemplos nos quais os fótons experimentam situações semelhantes às que ocorrem em presença de campos gravitacionais. Começemos por mostrar como é possível construir um Buraco Negro efetivo na teoria não-linear.

Consideramos os tensores $\epsilon_{\mu\nu}$ e $\mu_{\alpha\beta}$ tais que podemos escrever no meio dielétrico

$$D_\alpha = \epsilon_\alpha^\beta E_\beta$$

$$B_\alpha = \mu_\alpha^\beta H_\beta,$$

onde

$$\epsilon^{\mu\nu} = \epsilon(E) (\eta^{\mu\nu} - v^\mu v^\nu)$$

$$\mu^{\alpha\beta} = \mu_0 (\eta^{\alpha\beta} - v^\alpha v^\beta)$$

onde μ_0 é constante.

Mostre que existem dois modos de polarização que definem duas métricas efetivas (uma para cada modo) dadas por

$$g_{\mu\nu}^{(+)} = \eta_{\mu\nu} - \frac{v_\mu v_\nu}{c^2} \left(1 - \frac{1}{c^2 \mu_0 \epsilon} \right)$$

$$g_{\mu\nu}^{(-)} = \eta_{\mu\nu} - \frac{v_\mu v_\nu}{c^2} (1 - f) + \frac{\xi}{1 + \xi} l_\mu l_\nu,$$

onde definimos as quantidades

$$f \equiv \frac{1}{c^2 \mu_0 \epsilon (1 + \xi)}, \quad \xi \equiv \frac{\epsilon' E}{\epsilon}, \quad l_\mu \equiv \frac{E_\mu}{E}, \quad \epsilon' = d\epsilon/dE.$$

Nestas fórmulas introduzimos a velocidade da luz c , que havíamos feito igual a 1 nas seções precedentes.

Considerando a geometria do background como do tipo de Minkowski e usando coordenadas esféricas e

$$v_\mu = (v_0, v_1, 0, 0), \quad E_\mu = (E_0, E_1, 0, 0),$$

obtemos para a métrica efetiva a expressão

$$g_{00}^{(-)} = 1 - \frac{v_0^2}{c^2} (1 - f) + \frac{\xi}{1 + \xi} l_0^2,$$

$$g_{11}^{(-)} = -1 - \frac{v_1^2}{c^2} (1 - f) + \frac{\xi}{1 + \xi} l_1^2,$$

$$g_{01}^{(-)} = -\frac{v_0 v_1}{c^2} (1 - f) + \frac{\xi}{1 + \xi} l_0 l_1,$$

$g_{22}^{(-)}$ e $g_{33}^{(-)}$ como na geometria de Minkowski. Os vetores v_μ e l_μ satisfazem os vínculos

$$v_0^2 - v_1^2 = c^2,$$

$$l_0^2 - l_1^2 = -1,$$

$$v_0 l_0 - v_1 l_1 = 0.$$

Este sistema de equações pode ser resolvido em termos da componente v_1 , obtendo-se

$$v_0^2 = c^2 + v_1^2,$$

$$l_0^2 = \frac{v_1^2}{c^2}, \quad l_1^2 = \frac{c^2 + v_1^2}{c^2}.$$

A forma explícita dos coeficientes métricos é dada por (Mostre!):

$$g_{00}^{(-)} = \frac{1 - \beta^2(c^2 \mu_0 \epsilon - 1)}{c^2 \mu_0 (\epsilon + \epsilon' E)}$$

$$g_{01}^{(-)} = \beta \sqrt{1 + \beta^2} \frac{1 - c^2 \mu_0 \epsilon}{c^2 \mu_0 (\epsilon + \epsilon' E)},$$

$$g_{11}^{(-)} = \frac{\beta^2 - c^2 \mu_0 \epsilon (1 + \beta^2)}{c^2 \mu_0 (\epsilon + \epsilon' E)}.$$

onde $\beta = v_1/c$.

Segue, da expressão de g_{00} que, dependendo da função $\epsilon(E)$, esta métrica possui um horizonte em $r = r_h$, controlado pela condição $g_{00}(r_h) = 0$ ou seja,

$$\left(c^2 \mu_0 \epsilon - \frac{1}{\beta^2} \right) \Big|_{r_h} = 1.$$

.....

Coordenadas de Painlevé-Gullstrand

A métrica acima tem uma forma bastante semelhante à solução de Schwarzschild, nas coordenadas de Painlevé-Gullstrand [55, 56]:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) dt_P^2 \pm 2\sqrt{\frac{2GM}{r}} dr dt_P - dr^2 - r^2 d\Omega^2.$$

Mostre que pela transformação de coordenadas

$$dt_{PG} = dt_S - \frac{g_{01}(r)}{g_{00}(r)} dr.$$

ou seja

$$dt_P = dt_S \mp \frac{\sqrt{2GM/r}}{1 - \frac{2GM}{r}} dr,$$

esse elemento de linha se escreve nas coordenadas de Schwarzschild. Com efeito, temos nas coordenadas novas:

$$g_{11}^{(-)} = - \frac{\epsilon(E)}{(1 - \beta^2 [c^2 \mu_0 \epsilon(E) - 1]) (\epsilon(E) + \epsilon(E)' E)}.$$

Note que $g_{01}^{(-)}$ é zero no novo sistema de coordenadas e a posição do horizonte não se altera e ainda é dado pela expressão anterior.

Trabalhando nas coordenadas de Painlevé-Gullstrand a métrica para a polarização “–” descreve um buraco negro do tipo Schwarzschild. Vamos agora considerar os fótons com a outra polarização. Eles são descritos pela métrica dada por

$$g_{\mu\nu}^{(+)} = \eta_{\mu\nu} - \frac{v_\mu v_\nu}{c^2} \left(1 - \frac{1}{c^2 \mu_0 \epsilon(E)} \right).$$

Usando esta equação mostre que

$$g_{00}^{(+)} = 1 - (1 + \beta^2) \left(1 - \frac{1}{c^2 \mu_0 \epsilon(E)} \right),$$

$$g_{01}^{(+)} = -\beta \sqrt{1 + \beta^2} \left(1 - \frac{1}{c^2 \mu_0 \epsilon(E)} \right),$$

$$g_{11}^{(+)} = -1 - \beta^2 \left(1 - \frac{1}{c^2 \mu_0 \epsilon(E)} \right).$$

Esta métrica corresponde a um buraco negro do tipo Schwarzschild para algum $\epsilon(E)$ e β . Compare e determine onde se situa o horizonte.

Usando a mudança de coordenadas acima, podemos escrever a geometria efetiva em termos das coordenadas convencionais de Schwarzschild. Os coeficientes relevantes são dados por

$$g_{00}^{(+)} = \frac{1 + \beta^2(1 - c^2 \mu_0 \epsilon)}{c^2 \mu_0 \epsilon},$$

$$g_{11}^{(+)} = -\frac{1}{1 + \beta^2(1 - c^2 \mu_0 \epsilon)}.$$

Assim, o horizonte está localizado em r_h dado acima para fótons de qualquer polarização.

Um exemplo

Até o momento, ainda não especificamos as funções $\epsilon(E)$ e $E(r)$ que determinam a dependência dos coeficientes da métrica efetiva com a coordenada r . De agora em diante nós assumiremos uma função $\epsilon(E)$ linear, um tipo de comportamento exibido, por exemplo, em fluidos eletroreológicos [erf]. Especificamente, consideraremos

$$\epsilon = \epsilon_0(\bar{\chi} + \chi^{(2)}E(r))$$

com $\bar{\chi} = 1 + \chi^{(1)}$. As equações de Maxwell não triviais se escrevem

$$\left(\sqrt{-\gamma} \epsilon(r) F^{01}\right)_{,1} = 0.$$

Levando em consideração que $(F^{01})^2 = \frac{E^2}{c^2}$, obtemos como solução da Eqn. de Maxwell para uma fonte pontual em um *background* plano em coordenadas esféricas

$$F^{01} = \frac{-\bar{\chi} \pm \sqrt{\bar{\chi}^2 + 4\chi^{(2)}Q/\epsilon_0 r^2}}{2c\chi^{(2)}}.$$

Consideremos uma combinação particular dos parâmetros: $\chi^{(2)} > 0$, $Q > 0$ e o sinal “+” na frente da raiz quadrada em F^{01} de tal maneira que $E > 0$ para todo r . Para se obter uma expressão em forma mais simples para a métrica, é conveniente definir $\sigma(r)$:

$$E(r) \equiv \frac{\bar{\chi}}{2\chi^{(2)}} \sigma(r)$$

onde

$$\sigma(r) = -1 + \frac{1}{r} \sqrt{r^2 + q}$$

$$q = \frac{4\chi^{(2)}Q}{(\epsilon_0\bar{\chi})^2}.$$

Em termos de σ , a métrica toma a forma

$$ds_{(-)}^2 = \frac{2 - \beta^2 [\bar{\chi} (\sigma(r) + 2) - 2]}{2\bar{\chi} (1 + \sigma(r))} d\tau^2 - \frac{2 + \sigma(r)}{[2 - \beta^2 (\bar{\chi} (\sigma(r) + 2) - 2)] (1 + \sigma(r))} dr^2 - r^2 d\Omega^2,$$

$$ds_{(+)}^2 = \frac{2 - \beta^2 [\bar{\chi} (\sigma(r) + 2) - 2]}{\bar{\chi} (2 + \sigma(r))} d\tau^2 - \frac{2}{2 + \beta^2 [2 - \bar{\chi} (\sigma(r) + 2)]} dr^2 - r^2 d\Omega^2.$$

Note que o setor (t, r) destas métricas estão relacionados pela seguinte expressão:

$$ds_{(+)}^2 = \Phi(r) ds_{(-)}^2$$

onde o fator conforme Φ é dado por:

$$\Phi = 2 \frac{1 + \sigma(r)}{2 + \sigma(r)}$$

SOLUÇÕES

.....

DE – 1

As equações se escrevem como

$$D^\mu{}_{;\nu} v^\nu - D^\nu{}_{;\nu} v^\mu + \eta^{\mu\nu\alpha\beta} v_\alpha H_{\beta;\nu} = 0$$

$$B^\mu{}_{;\nu} v^\nu - B^\nu{}_{;\nu} v^\mu - \eta^{\mu\nu\alpha\beta} v_\alpha E_{\beta;\nu} = 0.$$

Projetando paralelamente e ortogonalmente (via o projetor $h_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - v_\mu v_\nu$) tem-se (mostre):

$$\epsilon E^\alpha{}_{;\alpha} - \frac{\epsilon' E^\alpha E^\beta}{E} E_{\alpha;\beta} = 0$$

$$\mu_0 H^\alpha{}_{;\alpha} = 0,$$

$$\epsilon \dot{E}^\lambda - \frac{\epsilon' E^\lambda v^\alpha E^\mu}{E} E_{\mu;\alpha} + \eta^{\lambda\beta\rho\sigma} v_\rho H_{\sigma;\beta} = 0,$$

$$\mu_0 \dot{H}^\lambda - \eta^{\lambda\beta\rho\sigma} v_\rho E_{\sigma;\beta} = 0.$$

.....

$$DE - 2$$

Das equações das descontinuidades segue:

$$\epsilon k^\alpha e_\alpha - \frac{\epsilon'}{E} E^\alpha e_\alpha E^\beta k_\beta = 0,$$

$$\mu_0 h^\alpha k_\alpha = 0,$$

$$\epsilon k^\alpha v_\alpha e^\mu - \frac{\epsilon'}{E} E^\lambda e_\lambda v^\alpha k_\alpha E^\mu + \eta^{\mu\nu\alpha\beta} k_\nu v_\alpha h_\beta = 0,$$

$$\mu_0 k_\alpha v^\alpha h^\lambda - \eta^{\lambda\beta\rho\sigma} k_\beta v_\rho e_\sigma = 0$$

onde ϵ' é a derivada de ϵ em relação a E .

Combinando essas relações tem-se

$$\left(\eta^{\mu\nu} + (\mu_0 \epsilon - 1 + \mu_0 \epsilon' E) v^\mu v^\nu - \frac{\epsilon'}{\epsilon E} E^\mu E^\nu \right) k_\mu k_\nu = 0.$$

Ou ainda, definindo a métrica efetiva:

$$\hat{g}^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = 0.$$

onde

$$\hat{g}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + (\mu_0 \epsilon - 1 + \mu_0 \epsilon' E) v^\mu v^\nu - \frac{\epsilon' E}{\epsilon} l^\mu l^\nu.$$

A inversa da métrica efetiva é dada por

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \left(1 - \frac{1}{\mu_0 \epsilon (1 + \xi)} \right) v_\mu v_\nu + \frac{\xi}{1 + \xi} l_\mu l_\nu,$$

onde

$$\xi \equiv \frac{\epsilon' E}{\epsilon}.$$

Em particular, quando ϵ é constante, essa fórmula reduz-se à métrica de Gordon [57]:

$$\hat{g}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + (\epsilon \mu_0 - 1) v^\mu v^\nu.$$

A geometria efetiva que controla a propagação dos fotons é dada pela forma generalizada de Gordon:

$$g^{\alpha\beta} = \text{diag} \left(\mu(\epsilon + \epsilon' E), -\frac{\epsilon + \epsilon' E}{\epsilon}, -\frac{1}{r^2}, -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right). \quad (9.3)$$

A partir dessa forma, devemos procurar em que condições ela pode se escrever como uma solução tipo buraco negro estático, isto é,

$$g^{\alpha\beta} = \text{diag} \left(\frac{1}{A}, -A, -\frac{1}{r^2}, -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right), \quad (9.4)$$

onde $A = A(r)$ é tal que $A(r) = 1 - r_h/r$ descreve um buraco negro de Schwarzschild com raio do horizonte r_h . Note que nessa mesma linha de análise pode-se construir buraco negro de Schwarzschild, Reissner-Nordström ou de-Sitter dependendo da forma da função A .

Uma solução pode ser obtida pondo

$$\epsilon + \epsilon' E = \sqrt{\epsilon/\mu}$$

Pondo ademais, $\mu = \epsilon_0^2/\epsilon^3$ obtemos para a permissividade as expressões

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{E_0}{E + E_0}, \text{ if } r > r_h, \quad (9.5)$$

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{E_0}{E - E_0}, \text{ if } \frac{1}{2}r_h < r < r_h, \quad (9.6)$$

$$\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1, \text{ if } r < \frac{1}{2}r_h. \quad (9.7)$$

10 GEOMETRIA EFETIVA EM TEORIAS NÃO LINEARES DO ELETROMAGNETISMO

GEE – 1

Considere a teoria do campo eletromagnético descrita pela lagrangiana $L = L(F)$ onde $F = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ gerando a dinâmica

$$\partial_\mu (L_F F^{\mu\nu}) = 0. \tag{10.1}$$

Use o método de Hadamard para obter a evolução das descontinuidades dessas teorias. Mostre que somente no caso particular da dinâmica linear de Maxwell as descontinuidades se propagam como geodésicas na mesma geometria onde o campo está definido. Para qualquer outra teoria a propagação se dá através de geodésicas em uma outra geometria, dependente do próprio campo. Mostre que a geometria efetiva pode ser escrita em termos do tensor momento-energia do campo.

GEE – 2

Considere o caso geral da Lagrangiana dependente dos dois invariantes F e G

$$L = L(F, G).$$

cuja dinâmica é dada por

$$\partial_\nu (L_F F^{\mu\nu} + L_G F^{*\mu\nu}) = 0.$$

Use o método de Hadamard para obter a evolução das descontinuidades dessas teorias.

.....

GEE – 3

Mostre que é possível escrever a geometria efetiva da teoria $L(F, G)$ que controla a propagação do foton sob a forma

$$g^{\mu\nu} = \mathcal{M} \eta^{\mu\nu} + \mathcal{N} T^{\mu\nu}.$$

Qual a forma (em função da lagrangiana e suas derivadas) de \mathcal{M} e \mathcal{N} ?

.....

GEE – 4

A geometria efetiva por onde as descontinuidades do campo eletromagnético se propagam tem uma forma muito envolvida. No entanto, existem teorias $L(F, G)$ nas quais a propagação se dá como se esta métrica efetiva fôsse a mesma do background minkowskiano. Qual deve ser a propriedade dessas dinâmicas?

GEE – 5

Efeitos quânticos levaram a modificação da teoria eletromagnética de Maxwell produzindo uma lagrangiana efetiva que para o caso de correção de primeira ordem foi calculado por Heisenberg e por Euler [7]. Para o limite de baixas frequências $\nu \ll m_e c^2 / h$ tem-se

$$L = -\frac{1}{4}F + \frac{\mu}{4} \left(F^2 + \frac{7}{4}G^2 \right),$$

onde

$$\mu \doteq \frac{8}{45} \alpha^2 \left(\frac{\hbar}{m_e c} \right)^3 \frac{1}{m_e c^2},$$

α é a constante de estrutura fina. Calcule a geometria efetiva da lagrangiana de Euler-Heisenberg.

GEE – 6 \mathcal{D} caminho do foton

Considere o caso em que a teoria linear da eletrodinâmica se acopla à relatividade geral. Nesse caso, a métrica efetiva se escreve

$$g_{ef}^{\mu\nu} k_\mu k_\nu \equiv \left(g^{\mu\nu} + 4 \frac{L_{FF}}{L_F} F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha \right) k_\mu k_\nu = 0.$$

onde a métrica $g_{\mu\nu}$ é determinada pelas equações da relatividade geral na teoria de Euler-Heisenberg em primeira ordem em μ . Examine o caso estático e esfericamente simétrico que generaliza a solução de Reisner-Nordström sob a forma

$$ds^2 = A(r)dt^2 - A(r)^{-1}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2(\theta)d\varphi^2.$$

.....

GEE – 7

Calcule a métrica efetiva inversa $\hat{g}_{\mu\nu}$ (forma covariante) no caso em que a lagrangiana depende somente do invariante F .

.....

GEE – 8

A dinâmica do eletromagnetismo sugerida por Born e Infeld é dada pela Lagrangiana

$$L = 2\beta^2 \sqrt{U} - 2\beta^2$$

onde

$$U \equiv 1 + \frac{F}{2\beta^2} - \frac{G^2}{16\beta^4}.$$

A adição do termo constante em L tem somente o propósito de tornar nulo, no infinito, o tensor de energia-momento do campo gerado por uma carga pontual. Em um cenário cosmológico, ele pode ser interpretado como uma constante cosmológica. Born-Infeld mostraram que essa dinâmica pode ser escrita em termos do determinante de um objeto sem simetria definida $C_{\mu\nu}$ construído como

$$C_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}.$$

Explicitamente mostraram que a lagrangiana toma a forma $L \sim \det[C^{\mu}_{\nu}]$. Mostre que, alternativamente, é possível escrever esta Lagrangiana em termos do determinante da métrica efetiva. Segue então que a teoria de Born-Infeld possui uma curiosa propriedade auto-consistente em sua ação que pode ser descrita como:

A dinâmica de Born-Infeld do campo eletromagnético é obtida pelo princípio variacional que extremiza o determinante da métrica efetiva que controla a propagação de suas ondas.

GEE – 9

Vamos combinar esse resultado anterior com a relatividade geral e considerar que o background não é Minkowski mas sim um espaço curvo. Mostre então que a relação entre a métrica efetiva e a curvatura da métrica do background permite afirmar o seguinte:

O vetor de propagação l^ν de fons lineares (obedecendo a teoria de Maxwell) é nulo

na geometria do background

$$g_{\mu\nu}^b |^\mu |^\nu = 0$$

e fofons não lineares (obedecendo a teoria de Born-Infeld) satisfazem a condição

$$R_{\mu\nu}^b |^\mu |^\nu = 0$$

onde $R_{\mu\nu}^b$ é o tensor de Ricci da geometria $g_{\mu\nu}^b$, do background gerado pelo campo de Born-Infeld segundo a dinâmica da relatividade geral.

GEE – 10

Considere uma teoria não linear do campo eletromagnético definido em um background de Minkowski. Vimos em exercícios anteriores que a propagação das discontinuidades do campo faz aparecer uma segunda métrica $\hat{g}^{\mu\nu}$ tal que as ondas sejam geodésicas nulas nessa métrica efetiva. Mostre que, como acontece no caso do campo escalar existe uma classe especial de teorias tal que sua dinâmica pode ser descrita como se ela estivesse em acoplamento mínimo com uma métrica gravitacional e de modo que essa métrica seja precisamente a métrica efetiva.

SOLUÇÕES

$GEE - 1$

Temos

$$(L_F \eta^{\mu\nu} - 4 L_{FF} F^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu}) k_{\mu} k_{\nu} = 0.$$

ou seja podemos interpretar a auto-interação do campo $F^{\mu\nu}$, referente à propagação das discontinuidades como a alteração efetiva da geometria do espaço-tempo pela métrica efetiva dada por

$$g^{\mu\nu} = L_F \eta^{\mu\nu} - 4 L_{FF} F^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu}.$$

ou seja

$$g^{\mu\nu} k_{\mu} k_{\nu} = 0.$$

O tensor de energia-momento (no caso $L = L(F)$) tem a forma

$$T_{\mu\nu} = -4L_F F_{\mu}^{\alpha} F_{\alpha\nu} - L \eta_{\mu\nu}.$$

A geometria efetiva se escreve

$$g^{\mu\nu} = \left(L_F + \frac{L L_{FF}}{L_F} \right) \eta^{\mu\nu} + \frac{L_{FF}}{L_F} T^{\mu\nu}.$$

Segue então que o responsável pelo afastamento da geometria de Minkowski no espaço-tempo por onde a onda eletromagnética se propaga é precisamente seu tensor de energia.

A inversa da métrica é dada por

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta_{\lambda}^{\mu}.$$

ou seja:

$$g_{\mu\nu} = a \eta_{\mu\nu} + b T_{\mu\nu},$$

onde a e b valem:

$$a = -b \left(\frac{L_F^2}{L_{FF}} + L + \frac{1}{2} T \right),$$

$$b = 16 \frac{L_{FF}}{L_F} \left[(F^2 + G^2) L_{FF}^2 - 16 (L_F + F L_{FF})^2 \right]^{-1},$$

e $T = T_{\alpha}^{\alpha}$ é o traço do tensor de energia-momento. Derivando a expressão $g^{\mu\nu} k_{\mu} k_{\nu} = 0$ obtemos o resultado desejado.

.....

GEE – 2

Temos

$$[L_F f^{\mu\nu} + 2A F^{\mu\nu} + 2B F^{*\mu\nu}] k_{\nu} = 0,$$

onde $A \doteq 2(\xi L_{FF} + \zeta L_{FG})$, $B \doteq 2(\xi L_{FG} + \zeta L_{GG})$, and $\zeta \doteq F^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta}^*$. **Contraíndo com $F^{\alpha}_{\mu} k_{\alpha}$ and $F^{*\alpha}_{\mu} k_{\alpha}$, respectivamente tem-se**

$$\left[\xi L_F + \frac{1}{2} B G \right] \eta^{\mu\nu} k_{\mu} k_{\nu} - 2A F^{\nu}_{\alpha} F^{\alpha\mu} k_{\nu} k_{\mu} = 0$$

$$\left[\zeta L_F - B F + \frac{1}{2} A G \right] \eta^{\mu\nu} k_{\mu} k_{\nu} - 2B F^{\nu}_{\alpha} F^{\alpha\mu} k_{\nu} k_{\mu} = 0.$$

Pondo $\Omega \doteq \zeta/\xi$ obtemos

$$\Omega^2 \Omega_1 + \Omega \Omega_2 + \Omega_3 = 0,$$

onde as quantidades Ω_i , $i = 1, 2, 3$ valem

$$\Omega_1 = -L_F L_{FG} + 2F L_{FG} L_{GG} + G(L_{GG}^2 - L_{FG}^2),$$

$$\Omega_2 = (L_F + 2G L_{FG})(L_{GG} - L_{FF}) + 2F(L_{FF} L_{GG} + L_{FG}^2),$$

$$\Omega_3 = L_F L_{FG} + 2F L_{FF} L_{FG} + G(L_{FG}^2 - L_{FF}^2).$$

A solução é

$$\Omega = \frac{-\Omega_2 \pm \sqrt{\Delta}}{2\Omega_1},$$

onde $\Delta \doteq (\Omega_2)^2 - 4\Omega_1\Omega_3$. **O caminho do foton é dado pela geodésica**

$$g^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = 0,$$

onde a métrica efetiva $g^{\mu\nu}$ vale

$$g^{\mu\nu} = L_F \eta^{\mu\nu} - 4 \left[(L_{FF} + \Omega L_{FG}) F^\mu{}_\lambda F^{\lambda\nu} + (L_{FG} + \Omega L_{GG}) F^\mu{}_\lambda F^{*\lambda\nu} \right].$$

.....

GEE - 3

$$\mathcal{M} = L_F + G(L_{FG} + \Omega L_{GG}) + \frac{1}{L_F} (L_{FF} + \Omega L_{FG})(L - G L_G)$$

$$\mathcal{N} = \frac{1}{L_F} (L_{FF} + \Omega L_{FG}).$$

Como consequência, a norma de Minkowski do vetor de propagação k_μ tem a forma

$$\eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = -\frac{\mathcal{N}}{\mathcal{M}} T^{\mu\nu} k_\mu k_\nu.$$

.....

$$GEE - 4$$

Da equação da métrica efetiva segue imediatamente que a condição

$$L_{FF} + \Omega L_{FG} = 0$$

permite afirmar que quando essa condição é satisfeita o foton se propaga em uma métrica efetiva $g^{\mu\nu}$ que é conforme à geometria de Minkowski.

.....

$$GEE - 5$$

O traço do tensor modificado de energia é dado por

$$T = \mu \left(F^2 + \frac{7}{4} G^2 \right). \quad (10.2)$$

Os coeficientes \mathcal{M} e \mathcal{N} da métrica associada são dados por

$$\mathcal{M} = -\frac{1}{4} + \mu F, \quad (10.3)$$

$$\mathcal{N} = -2\mu. \quad (10.4)$$

No caso particular em que o invariante F se anula temos $\mathcal{M} = -1/4$ e $\mathcal{N} = -2\mu$.

A métrica efetiva tem a forma

$$g_{EH}^{\mu\nu} = \left(-\frac{1}{4} + \mu F \right) \eta^{\mu\nu} - 2\mu T^{\mu\nu}.$$

.....

GEE – 6 Caminho do foton

Usando as equações de Euler-Heisenberg obtemos na primeira ordem em μ ,

$$A(r) = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{\kappa Q^2}{2r^2} - \frac{\kappa\mu Q^4}{5r^6}$$

A geometria efetiva tem a forma

$$k^\alpha k^\beta g_{\alpha\beta} = -4 \frac{L_{FF}}{L_F} F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha k_\mu k_\nu$$

onde a geometria do background é dada por

$$\tilde{g}^{00} = A(r)^{-1} [1 + 8\mu f(r)^2]$$

$$\tilde{g}^{11} = -A(r) [1 + 8\mu f(r)^2]$$

$$\tilde{g}^{22} = g^{22}$$

$$\tilde{g}^{33} = g^{33}$$

Assim, o foton se propaga na geometria modificada

$$d\tilde{s}^2 = [1 - 8\mu f(r)^2][A(r)dt^2 - A(r)^{-1}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\varphi^2]$$

cujas geodésicas tem a forma:

$$[1 - 8\mu f(r)^2][A(r)\dot{t} = \text{constant} = h_0]$$

$$r^2 \dot{\varphi} = \text{constant} = l_0$$

$$\dot{r}^2 = \frac{h_0^2}{[1 - 8\mu f(r)^2]} - \frac{l_0^2 A(r)}{r^2 [1 - 8\mu f(r)^2]}.$$

onde o ponto significa derivada em relação a um parâmetro \tilde{s} . Note que ajustou-se condições iniciais $\theta = \pi/2$ e $\dot{\theta} = 0$. Mudando a variável, como é comum nesses casos, tem-se $r = 1/v$ e, então a equação radial de propagação do foton

$$v'' + v = 3mv^2 - \left(1 - 32 \frac{\mu h_0^2}{\kappa l_0^2} Q\right) \kappa Q^2 v^3 + O(\mu^2, v^4).$$

Deve-se notar que a contribuição do termo de correção quântica é da mesma ordem que o termo gravitacional da teoria clássica de Reissner-Nordstron, exibindo semelhança de propagação do foton seja em um campo gravitacional na teoria linear do eletromagnetismo, seja na teoria não linear do eletromagnetismo.

.....

GEE – 7

A geometria efetiva tem a forma

$$g^{\mu\nu} = L_F \gamma^{\mu\nu} - 4 L_{FF} F^\mu{}_\lambda F^{\lambda\nu}$$

A inversa, $g_{\mu\nu}$ definida por

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\alpha} = \delta_\alpha^\mu$$

se calcula usando as identidades

$$F^\mu{}_\lambda F^{\lambda\nu} - F^{*\mu}{}_\lambda F^{*\lambda\nu} = -\frac{1}{2} F \gamma^{\mu\nu},$$

$$F^{*\mu}{}_\lambda F^{\lambda\nu} = -\frac{G}{4} \gamma^{\mu\nu}.$$

O resultado é

$$g_{\mu\nu} = A \gamma_{\mu\nu} + B F_\mu{}^\lambda F_{\lambda\nu}$$

onde A e B são dados por

$$A = \frac{1}{X} (L_F + 2 F L_{FF}),$$

$$B = \frac{4 L_{FF}}{X},$$

$$X \equiv L_F^2 + L_{FF} (2 F L_F - G^2).$$

.....

GEE – 8

Usando as expressões calculadas anteriormente para uma lagrangiana da forma $L = L(F, G)$ obtemos (mostrar esse resultado faz parte do exercício) que, no caso especial de Born-Infeld, todas as quantidades Ω_i , $i = 1, 2, 3$ são nulas. Nesse caso, não se pode obter a métrica efetiva a partir da equação geral. No caso especial em análise a métrica toma a forma

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{4\beta^2 U^{\frac{3}{2}}} \left[\left(\beta^2 + \frac{F}{2} \right) \eta^{\mu\nu} + F^\mu{}_\lambda F^{\lambda\nu} \right]$$

Sua inversa é dada por

$$g_{\mu\nu} = 4 \sqrt{U} \left[\eta_{\mu\nu} - \frac{1}{\beta^2} F_\mu{}^\lambda F_{\lambda\nu} \right]$$

Ou seja, temos uma só equação característica (ao invés de duas) mostrando que nessa teoria não ocorre o fenômeno de birefringência. Da fórmula do determinante para a matriz $A \equiv \eta^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = I - (1/\beta^2) F^\mu{}_\alpha F^\alpha{}_\nu$, tem-se:

$$\det A = U^2.$$

e, conseqüentemente, a lagrangiana deBorn-Infeld se escreve em termos do determinante da métrica efetiva:

$$L_{BI} = \beta^2 \left[1 - \frac{1}{2} (\det |g_{\mu\nu}|)^{\frac{1}{4}} \right].$$

GEE – 9

Da expressão do determinante temos

$$\det \left(\delta^\mu{}_\nu - \frac{1}{\beta^2} F^\mu{}_\alpha F^\alpha{}_\nu \right) = U^2$$

ou seja,

$$\det \left(\delta^\mu{}_\nu + \frac{1}{\beta} F^\mu{}_\nu \right) = U.$$

Considere a expressão geral do tensor de energia-momento de uma teoria não linear do eletromagnetismo

$$T_{\mu\nu} = -4 L_F F_\mu{}^\alpha F_{\alpha\nu} + (G L_G - L) g_{\mu\nu}^b,$$

onde o índice b no tensor métrico refere-se à geometria do background. No caso Born-Infeld, temos

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{U}} F_\mu{}^\alpha F_{\alpha\nu} + \left(\frac{G^2}{16\beta^2\sqrt{U}} - \beta^2 + \beta^2\sqrt{U} \right) g_{\mu\nu}^b$$

Então

$$F_{\mu}^{\alpha} F_{\alpha\nu} = \sqrt{U} T_{\mu\nu} - \left(\frac{F}{2} + \beta^2 - \beta^2 \sqrt{U} \right) g_{\mu\nu}^b.$$

e para o traço

$$T = \frac{-F}{\sqrt{U}} + \frac{G^2}{4\beta^2\sqrt{U}} - 4\beta^2 + 4\beta^2\sqrt{U}$$

consequentemente a métrica efetiva se reduz a

$$g_{\mu\nu} = \frac{4U}{\beta^2} \left(-T_{\mu\nu} + \frac{1}{2} T g_{\mu\nu}^b \right)$$

Se usarmos as equações da relatividade geral pode-se escrever

$$g_{\mu\nu} = \frac{4U}{\beta^2} R_{\mu\nu}^b.$$

.....

GEE – 10

A lagrangiana tem a forma

$$L = f(F + G)$$

para qualquer função f .

11 O CAMPO ESCALAR

Introdução

A geometria do espaço-tempo é determinada pelas forças gravitacionais. A possibilidade de tal identificação decorre do caráter universal desta interação. No entanto, em certos casos, o tratamento de um outro tipo particular de interação pode ser adaptado para a descrição dos processos de evolução em termos de uma modificação efetiva da geometria. Este é o caso, por exemplo, com a propagação de ondas de spin zero, spin um (fótons) em teorias não lineares e outras configurações (ver por exemplo [58], [59]).

De fato, as discontinuidades em teorias não lineares propagam-se em curvas que são geodésicas em uma métrica efetiva $\hat{g}_{\mu\nu}$ que depende não somente de sua dinâmica mas também das propriedades do campo de *background*.

A importância de tais modelos análogos, caracterizados devido ao tratamento geométrico de diversos fenômenos de natureza não gravitacional, está relacionada à possibilidade de, através desta análise, estudar-se campos gravitacionais. Como se pudessemos tratar a força gravitacional através de sua reprodução artificial em laboratório. O fato de que é possível produzir casos específicos de geometrias que apresentam propriedades similares às daquelas obtidas através da relatividade geral, permite uma melhor compreensão do comportamento dos próprios campos gravitacionais. Vimos isso no caso do campo eletromagnético e agora iremos examinar o caso do campo escalar.

Dinâmica não linear de um campo escalar

CENL – 1

Considere a dinâmica de um campo escalar φ dada por

$$L = L(w)$$

onde $w \equiv \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi$. Calcule sua equação de movimento e respectivo tensor de energia-momento.

.....

CENL – Descontinuidades

Nesta seção estaremos interessados em calcular as superfícies características da propagação das ondas nestas teorias. Usaremos o método de Hadamard descrito em seção anterior. Faremos um breve resumo para o caso do campo escalar.

Seja Σ uma superfície de descontinuidade do campo escalar φ . Consideraremos φ e sua primeira derivada $\partial_\mu \varphi$ contínuas através de Σ , enquanto a segunda derivada apresenta uma descontinuidade:

$$\begin{aligned} [\varphi(x)]_\Sigma &= 0, \\ [\partial_\mu \varphi(x)]_\Sigma &= 0, \\ [\partial_\mu \partial_\nu \varphi(x)]_\Sigma &= k_\mu k_\nu \xi(x), \end{aligned}$$

onde $k_\mu := \partial_\mu \Sigma$ é o vetor de propagação e $\xi(x)$ a amplitude da descontinuidade. Como no caso eletromagnético, mostre que a não-linearidade do campo escalar sugere a introdução de uma geometria efetiva onde as ondas se propagam como geodésicas. Qual a forma dessa geometria? Calcule a métrica efetiva inversa. Escreva a métrica efetiva em termos do tensor de energia do campo escalar.

CENL – o

Métrica efetiva no background de Minkowski

Seja o background dado pela geometria de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$. Consideremos um campo escalar que só depende do tempo $\varphi = \varphi(t)$ e que obedece a Lagrangiana

$$L = L(w) + V(\varphi).$$

Mostre que a geometria efetiva \hat{g} experimentada pelas ondas de φ nada mais é do que a geometria espacialmente plana de Friedman:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dr^2 + r^2 d\Omega^2).$$

Com efeito, como φ não depende das coordenadas espaciais a sua dinâmica reduz-se simplesmente a:

$$\ddot{\varphi} (L_w + 2(\dot{\varphi})^2 L_{ww}) = -\frac{1}{2} \frac{\delta V}{\delta \varphi},$$

onde o ponto representa derivada em relação ao tempo. Como $w = (\dot{\varphi})^2$ temos:

$$\ddot{\varphi} \Psi = -\frac{1}{2} \frac{\delta V}{\delta \varphi}.$$

O elemento fundamental de linha se escreve:

$$ds^2 = \hat{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - \frac{1}{L_w} (dr^2 + r^2 d\Omega^2).$$

Note que $\Psi = 1$, isto é $2wL_{ww} = 1 - L_w$, leva a $\hat{g}_{tt} = 1$.

.....

CENL – 2

Existe alguma dinâmica para o campo escalar de tal modo que a métrica efetiva se escreve sob a forma

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \Delta (T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu}),$$

onde Δ é um funcional escalar do campo? Mostre que isso é possível para dinâmicas descritas por Lagrangianas que satisfaçam a equação

$$L_w^2 + L_{ww} (L + w L_w) = 0 \tag{11.1}$$

onde $L_w = \partial L / \partial \varphi$.

.....

CENL – 3

Falsa inflação no espaço-tempo de Minkowski

Como o campo escalar não-linear se propaga como uma geodésica em uma métrica efetiva, podemos examinar alguns casos de interesse que podem contribuir para um diferente ponto de vista na Cosmologia. Como exemplo, mostre que existem dinâmicas do campo escalar [60] nas quais a métrica efetiva é semelhante à estrutura da geometria de deSitter.

CENL – 4

O caso da dinâmica Born-Infeld para o campo escalar

Vimos que a forma da dinâmica proposta por Born e Infeld para o campo eletromagnético tem propriedades excepcionais. Em particular mostramos que para se obter a dinâmica do campo eletromagnético nesta teoria deve-se variar a geometria efetiva e extremizar o determinante de sua métrica efetiva. Esta geometria efetiva se define como sendo aquela que determina a estrutura causal associada à dinâmica gerada pela teoria BI. Mostre que uma propriedade semelhante ocorre para o campo escalar.

Considere a teoria de um campo escalar controlado pela lagrangiana

$$L = F(w) - V(\Phi)$$

onde $w = \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi$. Escreva a equação de evolução do campo Φ .

Mostre que as ondas (descontinuidades) se propagam como geodésicas na métrica

$$\hat{g}^{\mu\nu} = L_w \eta^{\mu\nu} + 2 L_{ww} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi.$$

Calcule a inversa $\hat{g}_{\mu\nu}$ e seu determinante.

Mostre que a condição para que a métrica $\hat{g}^{\mu\nu}$ seja escrita em um sistema gaussiano (como no background) é dada por

$$\Psi \equiv L_w + 2 w L_{ww} = 1.$$

Considere o caso particular em que o potencial tem a forma

$$V(\Phi) = -\lambda^2 X \left(1 + \frac{X}{2}\right)$$

onde $X \equiv \exp(-2H\Phi/\lambda)$.

Mostre que quando $\Phi = \Phi(t)$ a métrica efetiva é semelhante à estrutura do universo de deSitter [60].

SOLUÇÕES

CENL – 1

A equação de movimento se escreve

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu} \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} L_w (\partial_{\nu} \varphi) \right) = 0,$$

ou

$$w L_{ww} + L_w \square \phi = 0.$$

onde $L_w = \partial L / \partial \varphi$. A expressão do tensor momento energia tem a forma

$$T_{\mu\nu} = 2 L_w \varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} - L g_{\mu\nu}$$

cujo traço vale

$$T = -4 L + 2 w L_w.$$

CENL – 2

Aplicando o método de Hadamard se encontra:

$$k_{\mu} k_{\nu} \left(L_w g^{\mu\nu} + 2 L_{ww} \partial^{\mu} \varphi \partial^{\nu} \varphi \right) = 0.$$

Esta equação sugere a introdução de uma métrica efetiva definida por:

$$\hat{g}^{\mu\nu} := L_w g^{\mu\nu} + 2L_{ww} \partial^\mu \varphi \partial^\nu \varphi$$

A inversa $\hat{g}_{\mu\nu}$ é dada pela condição $\hat{g}^{\mu\alpha} \hat{g}_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu$. Então temos:

$$\hat{g}_{\mu\nu} := \frac{1}{L_w} \left(g_{\mu\nu} - \frac{2L_{ww}}{\Psi} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi \right),$$

onde $\Psi := L_w + 2wL_{ww}$.

Escrita em termos do tensor $T_{\mu\nu}$ tem-se:

$$\hat{g}_{\mu\nu} := -\frac{L_{ww}}{L_w^2} \frac{T_{\mu\nu}}{\Psi} + \frac{1}{L_w} \left(1 - \frac{L L_{ww}}{\Psi L_w} \right) g_{\mu\nu}.$$

.....

CENL – 3

Somente para simplificar nosso cálculo, vamos trabalhar em um sistema gaussiano. A primeira questão que aparece é: em que circunstância podemos usar o mesmo tempo global que aparece na métrica do "background"? Do que vimos acima, segue que as condições $\Psi = 1$ e $\varphi = \varphi(t)$ implicam que a variável t na métrica do background

$$ds^2 = dt^2 - d\sigma^2$$

ainda é tempo global para a métrica efetiva. Lembre que

$$\Psi = L_w + 2wL_{ww} = 1.$$

Esta equação pode ser imediatamente integrada gerando a Lagrangiana:

$$L = w + 2\lambda\sqrt{w} - V,$$

onde λ é uma constante e V um potencial que não contém nenhuma função de w , e em geral podemos escrever $V = V(\varphi)$. Note que além desta simplificação formal, este caso pode ser entendido como uma perturbação da teoria linear padrão, quando fizermos $\lambda = 0$. Mostre que se pode construir uma falsa inflação associada a potenciais $V(\phi)$ usados na literatura [61] como

$$V(\varphi) = -\lambda^2 x \left(1 + \frac{x}{2}\right),$$

onde $x \equiv \exp -\frac{2H}{\lambda} \varphi$.

Note que a dinâmica descrita pela teoria

$$L = L(w) + V(\varphi)$$

se escreve

$$\frac{1}{\sqrt{-\eta}} \partial_\mu \left(\sqrt{-\eta} \eta^{\mu\nu} L_w \partial_\nu \Phi \right) + \frac{1}{2} \frac{\delta V}{\delta \Phi} = 0.$$

Se estamos interessados em uma geometria tipo de-Sitter, escrevemos $a(t) = \exp Ht$, H sendo um parâmetro real positivo. Para esta escolha, temos que:

$$a(t)^2 = \frac{1}{L_w},$$

conduz a:

$$\sqrt{w} = \frac{\lambda}{\exp -2Ht - 1}.$$

Como \sqrt{w} é positivo λ deve ser negativo. Assumindo $\dot{\varphi} \leq 0$ (cálculos para $\dot{\varphi} \geq 0$ são análogos) esta equação pode ser integrada:

$$\varphi = \frac{\lambda}{2H} \ln(\exp 2Ht - 1) + K,$$

onde K é uma constante, que podemos colocar como zero. Conclusão: a observação da geometria efetiva $\hat{g}_{\mu\nu}$ levaria a acreditarmos, erroneamente, que vivemos em um universo de de-Sitter.

CENL – 4

Temos

$$\hat{g}^{\mu\nu} := L_w \eta^{\mu\nu} + 2L_{ww} \partial^\mu \varphi \partial^\nu \varphi.$$

cuja inversa é dada por

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \frac{1}{L_w} \eta_{\mu\nu} - \frac{2L_{ww}}{L_w (L_w + 2wL_{ww})} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi.$$

e o determinante vale

$$\sqrt{-\hat{g}} = L_w^{-2} \left(1 + 2 \frac{L_{ww}}{L_w} w \right)^{-1/2} \sqrt{-\eta}.$$

Temos

$$\det \hat{g}_{\mu\nu} = L_w^{-4} \det \Gamma$$

onde a matriz Γ é definida como

$$\Gamma^\mu{}_\nu \equiv \delta^\mu{}_\nu + Q \partial^\mu \varphi \partial_\nu \varphi,$$

onde fizemos

$$Q \equiv -\frac{2L_{ww}}{\Psi}$$

e

$$\Psi \equiv L_w + 2wL_{ww}.$$

Temos

$$\det \Gamma = -\frac{1}{4} T_4 - \frac{1}{4} T_1^2 T_2 + \frac{1}{3} T_1 T_3 + \frac{1}{8} T_2^2 + \frac{1}{24} T_1^4.$$

onde T_a é o traço da matriz Γ elevada à potência a . Temos, respectivamente

$$T_1 = 4 + X$$

$$T_2 = 4 + 2X + X^2$$

$$T_3 = 4 + 3X + 3X^2 + X^3$$

$$T_4 = 4 + 4X + 6X^2 + 4X^3 + X^4$$

Juntando estes termos na fórmula acima do determinante, encontramos

$$\det\Gamma = -(1 + X).$$

Então

$$\det\hat{g}_{\mu\nu} = -L_w^{-4}(1 + X).$$

A dinâmica de Born-Infeld é dada pela Lagrangiana

$$L = 2\beta^2\sqrt{U} - 2\beta^2$$

onde

$$U \equiv 1 + \frac{w}{\beta^2}.$$

Seguimos a forma original e retiramos a "constante cosmológica" inerente à dinâmica de Born-Infeld. Segue então que podemos escrever esta Lagrangiana em função da métrica efetiva:

$$L = 2\beta^2\sqrt{-\det\hat{g}^{\mu\nu}} - 2\beta^2$$

.....

Métrica efetiva no background de Minkowski

Escrevendo a geometria de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$. Consideremos um campo escalar que só depende do tempo $\varphi = \varphi(t)$. A geometria efetiva \hat{g} experimentada por φ nada mais é do que a geometria espacialmente plana de FRW dada por:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dr^2 + r^2d\Omega^2). \quad (11.2)$$

Como φ não depende das coordenadas espaciais a equação de Euler-Lagrange reduz-se simplesmente a:

$$\ddot{\varphi}(L_w + 2(\dot{\varphi})^2 L_{ww}) = -\frac{1}{2} \frac{\delta V}{\delta \varphi}, \quad (11.3)$$

onde o ponto representa derivada em relação ao tempo. Como $w = (\dot{\varphi})^2$ temos:

$$\ddot{\varphi} \Psi = -\frac{1}{2} \frac{\delta V}{\delta \varphi}. \quad (11.4)$$

O elemento fundamental de linha se escreve:

$$ds^2 = \hat{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - \frac{1}{L_w} (dr^2 + r^2 d\Omega^2). \quad (11.5)$$

Note que $\Psi = 1$, isto é $2L_{ww} = 1 - L_w$, leva a $\hat{g}_{tt} = 1$. Se estamos interessados em uma geometria tipo de-Sitter, escrevemos $a(t) = \exp Ht$, H sendo um parâmetro real positivo. Para esta escolha, temos que:

$$a(t)^2 = \frac{1}{L_w}, \quad (11.6)$$

conduz a:

$$\sqrt{w} = \frac{\lambda}{\exp -2Ht - 1}. \quad (11.7)$$

Como \sqrt{w} é positivo λ deve ser negativo. Assumindo $\dot{\varphi} \leq 0$ (cálculos para $\dot{\varphi} \geq 0$ são análogos) esta equação pode ser integrada:

$$\varphi = \frac{\lambda}{2H} \ln(\exp 2Ht - 1) + K, \quad (11.8)$$

onde K é uma constante, que podemos colocar como zero.

Conclusão: a observação da geometria efetiva $\hat{g}_{\mu\nu}$ levaria a acreditarmos, erroneamente, que vivemos em um universo de de-Sitter.

.....

Gerando um Big-Bang sem gravitação

Consideremos a Lagrangiana

$$L = w + 2\lambda\sqrt{w} - V,$$

onde a forma do potencial é dada por

$$V = \mu^2 \varphi^2 + 2\lambda \mu \varphi_0 \sqrt{1 - \frac{\varphi^2}{\varphi_0^2}} + \frac{\lambda}{\mu} \arcsin\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)$$

No "background" de Minkowski a equação de movimento reduz-se à forma

$$L_{ww} w + L_w \partial_\alpha \partial^\alpha \phi + \frac{1}{2} \frac{\delta V}{\delta \phi} = 0.$$

Vamos procurar uma solução onde o campo é espacialmente homogêneo e só dependa do tempo. Uma solução possível é dada por

$$\phi = \phi_0 \cos(\mu t).$$

A geometria efetiva é dada por (mostre)

$$ds^2 = dt^2 - \frac{\sqrt{w}}{\lambda + \sqrt{w}} d\sigma^2 \quad (11.9)$$

Usando a solução acima,

$$\sqrt{w} = \mu \phi_0 \sin(\mu t)$$

onde $0 < \mu t < \pi$. O fator de escala toma a forma

$$a^2(t) = \frac{\mu \phi_0 \sin(\mu t)}{\lambda + \mu \phi_0 \sin(\mu t)}.$$

A geometria efetiva é do tipo Friedmann: ela "começa" em $t = 0$, se expande homogeneamente até o valor máximo do raio $a(t)$ para depois contrair até a singularidade em π .

.....

Gerando um Big-Bang na geometria não-singular de de-Sitter

Vamos mostrar agora (a maior parte dos cálculos será deixada como exercício) que a geometria efetiva pode transformar uma geometria regular como de-Sitter em uma estrutura singular como fizemos acima no caso do "background" de Minkowski.

Seja a geometria dada por

$$ds^2 = dt^2 - e^{2Ht} d\sigma^2$$

Considere a teoria anterior

$$L = w + 2\lambda\sqrt{w} - V,$$

onde o potencial agora assume uma forma distinta dada por

$$V = \mu^2 \phi^2 - 2\lambda\mu\sqrt{1 - \left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^2} + \left(p^2\phi_0 + \frac{\lambda}{\mu}\right) \arcsin \frac{\phi}{\phi_0} + p\phi\sqrt{1 - \left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^2} + 6H\lambda\phi$$

onde $p \equiv 3H\mu\phi_0$.

Deixaremos como exercício mostrar que uma solução possível é dada por

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\mu t).$$

A métrica efetiva é

$$ds^2 = dt^2 - A^2(t) d\sigma^2$$

onde

$$A^2 = \frac{\mu \varphi_0 \sin(\mu t)}{\lambda + \mu \varphi_0 \sin(\mu t)} e^{2Ht}.$$

Embora a métrica do "background" é tipo de-Sitter (sem singularidade), a métrica efetiva é singular em $t = 0$.

Modificação da geometria

Do que vimos, podemos extrair o seguinte procedimento:

Dada uma geometria do tipo Friedmann

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) d\sigma^2$$

e um campo escalar φ cuja dinâmica é dada por

$$L = w + 2\lambda\sqrt{w} - V \tag{11.10}$$

onde λ é um parâmetro livre e o potencial V depende somente de φ , as discontinuidades do campo se propagam em uma métrica efetiva

$$ds^2 = dt^2 - \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{w + \lambda}} d\sigma^2.$$

O problema inverso seria o seguinte: dar a expressão do fator de evolução da parte espacial e em seguida calcular a expressão do potencial $V(\varphi)$ capaz de gerar esta geometria.

12 COSMOLOGIA GERADA POR UM CAMPO ESCALAR NA RG

$$CE - \text{C\O} - 1$$

Considere a teoria não linear do campo φ dada pela lagrangiana

$$L = L(w)$$

onde $w \equiv \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi g^{\mu\nu}$. Calcule a expressão do seu tensor de energia-momento. Usando a decomposição de $T_{\mu\nu}$ em termos de um campo de velocidade identificado com

$$v_\mu = \frac{\partial_\mu \varphi}{\sqrt{|w|}}$$

calcule suas partes irredutíveis (densidade de energia, pressão, fluxo de calor e pressão anisotrópica). Particularize em seguida para a teoria da forma Born-Infeld escalar dada por

$$L_{BI} = -\sqrt{b w + e}$$

onde b e e são constantes.

CE – 2

Considere o caso particular da teoria dada por [62]

$$L = -A \sqrt{w (\Sigma^2 - w)}$$

onde A e Σ são constantes. O espectro permissível para w se restringe ao domínio $(0, \Sigma^2)$. Calcule as expressões da densidade e da pressão. Qual o estado fundamental desta teoria? Mostre que para valores da densidade muito grandes (comparados com o produto $A\Sigma^2$ o fluido toma a forma assintótica de um gas de Chaplygin [moschella]. Na interpretação de fluido da distribuição de energia do campo escalar a quantidade importante que controla a estabilidade das perturbações (chamada por analogia, "velocidade do som") é dada pela quantidade $c_s^2 = (\partial p / \partial w) / (\partial \rho / \partial w)$ que no caso da lagrangiana acima é dada por

$$c_s^2 = \frac{2w^2 - 3\Sigma^2 w + \Sigma^4}{2w^2 - 3\Sigma^2 w}.$$

Estude essa velocidade comparando-a com a da luz.

.....

CE – 3

Nesta teoria acima, considere um cenário de um universo espacialmente homogêneo e isotrópico como Friedman. Mostre que a aceleração do universo muda de sinal durante sua evolução. Neste cenário cosmológico controlado pela teoria escalar tipo Born-Infeld modificado existe um caso onde a geometria de Friedman toma a forma especial de Milne, de um universo de Minkowski. Quando isso acontece? [62]

CG – 4

Considere uma teoria não linear de um campo escalar definido em um background de Minkowski. A propagação das descontinuidades do campo faz aparecer uma segunda métrica $\hat{g}^{\mu\nu}$ tal que as ondas sejam geodésicas nulas nessa métrica efetiva. Mostre que existe uma classe especial de teorias [7] tal que sua dinâmica pode ser descrita como se ela estivesse em acoplamento mínimo com uma métrica gravitacional e de modo que essa métrica seja precisamente a métrica efetiva.

SOLUÇÕES

CE – 1

Por definição

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} L)}{\delta g_{\nu}}.$$

então

$$T_{\mu\nu} = -L g_{\mu\nu} + 2 L_w \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi.$$

onde $L_w = \partial L / \partial w$. No caso onde usamos o gradiente do campo como a velocidade do fluido para representá-lo trata-se de um fluido perfeito onde as únicas quantidades não nulas são:

$$\rho = -L + 2 w L_w$$

$$p = L.$$

E, no caso tipo Born-Infeld tem-se

$$\rho = e / \sqrt{b w + e}$$

$$p = -\sqrt{b w + e}$$

ou seja, corresponde ao chamado gas de Chaplygin [63]:

$$p = -\frac{e}{\rho}.$$

.....

$$CE - 2$$

Trata-se do estado onde a distribuição de energia tem a forma de uma constante cosmológica. Isso acontece para

$$w_0 = \Sigma^2/2.$$

Tem-se, em geral,

$$\rho = \frac{A w^2}{\sqrt{w (\Sigma^2 - w)}}$$

$$p = -A \sqrt{w (\Sigma^2 - w)}.$$

A equação de estado se escreve

$$\rho = \left(A \Sigma^2 + \sqrt{A^2 \Sigma^4 - 4p^2} \right)^2 / 4p.$$

Então quando $\rho \gg A \Sigma^2$ tem-se

$$p \simeq -\frac{A^2 \Sigma^4}{\rho}.$$

No estado fundamental tem-se

$$\rho_v = \frac{A \Sigma^2}{2} = -p_v.$$

.....

CE – 3

A aceleração do universo muda de sinal no ponto

$$w_a = \frac{3}{4} \Sigma^2$$

pois a aceleração é controlada pela expressão

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{A w (4 w - 3 \Sigma^2)}{\sqrt{w (\Sigma^2 - w)}}$$

.....

CE – 4

Devemos ter a dinâmica escrita alternativamente sob a forma

$$\square \varphi \equiv \frac{1}{\sqrt{-\hat{g}}} \partial_\mu \left(\sqrt{-\hat{g}} \partial_\nu \varphi \hat{g}^{\mu\nu} \right) = 0.$$

Ou seja, a forma da lagrangiana deve satisfazer

$$2 w L_{ww} + L_w - L_w^5 = 0.$$

13 TEORIA GEOMÉTRICA ESCALAR DA GRAVITAÇÃO

Comentário

Logo após o estabelecimento da teoria da relatividade especial (RE) ficou claro para vários cientistas que a teoria da gravitação de Newton deveria ser modificada seriamente para compatibilizá-la com as novas ideias da RE. Entre 1905 e 1912 Einstein, Nordstron, Abraham e outros físicos, examinaram a possibilidade de transformar o campo escalar tri-dimensional φ_N newtoniano em um campo escalar ϕ no espaço-tempo quadri-dimensional. Einstein e Nordstron sugeriram que essa nova teoria gravitacional deveria ter duas propriedades básicas:

- O campo livre deveria obedecer à dinâmica linear $\square\phi = 0$;
- A geometria do espaço-tempo por onde os corpos materiais deveriam se movimentar não seria mais a descrita na relatividade especial mas sim por uma geometria conforme dada por $g_{\mu\nu} = \phi \eta_{\mu\nu}$.

Pouco tempo depois os físicos realizaram que uma tal estrutura geométrica não poderia descrever todos os processos gravitacionais. Quais processos de origem gravitacional não poderiam ser descritos por essa teoria?

Recentemente [64] essas dificuldades foram resolvidas pela teoria geométrica escalar GSG. É dessa teoria que extraímos os exercícios a seguir.

GSG – 1

Considere a teoria de um campo escalar dada pela Lagrangiana

$$L = V \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi \eta^{\mu\nu} \quad (13.1)$$

No caso em que $V = 1/2$ ela descreve o campo de Klein-Gordon. A equação de Φ se escreve

$$\square_M \Phi + \frac{1}{2} \frac{V'}{V} w = 0,$$

ou seja

$$\square_M \Phi = \frac{1}{\sqrt{-\eta}} \partial_\mu (\sqrt{-\eta} \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi)$$

onde $V' \equiv dV/d\Phi$ e η é o determinante de $\eta_{\mu\nu}$.

Mostre que é possível escrever essa teoria em uma métrica riemanniana $q_{\mu\nu}$ definida somente em termos da métrica de Minkowski e do campo escalar de tal modo que na geometria $q_{\mu\nu}$ a dinâmica se escreve sob a forma [64]

$$\square \Phi = 0$$

onde

$$\square \Phi = \frac{1}{\sqrt{-q}} \partial_\mu (\sqrt{-q} q^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi).$$

.....

GSG – 2

Considere a métrica de Minkowski dada no sistema de coordenadas (t, R, θ, φ) na forma

$$ds^2 = dt^2 - dR^2 - R^2 d\Omega^2$$

Considere o exercício anterior no caso especial em que o campo Φ dependa só da variável R escreva a equação de movimento que deve ser satisfeita pelo campo Φ . Qual a forma da métrica associada?

GSG – 3

Considere o caso anterior de um campo escalar dependendo somente da coordenada radial R e satisfazendo a equação

$$\square\Phi = 0$$

na métrica $q_{\mu\nu}$. Fazendo a transformação de coordenada de R para r definida por

$$R = \sqrt{\alpha} r$$

escreva a forma da métrica $q_{\mu\nu}$ no sistema de coordenadas (t, r, θ, φ) . Qual a forma do potencial V para que essa geometria coincida com a de Schwarzschild?

GSG – 4

Considere a métrica de Minkowski sob a forma [65]

$$ds_M^2 = dt^2 - dR^2 - R^2 d\Omega^2.$$

fazendo a transformação $R = \sqrt{\alpha} r$ onde α depende somente de r encontramos

$$ds_M^2 = dt^2 - \alpha \left(\frac{1}{2\alpha} \frac{d\alpha}{dr} r + 1 \right)^2 dr^2 - \alpha r^2 d\Omega^2.$$

Considere a métrica gravitacional dada por

$$q^{\mu\nu} = \alpha \eta^{\mu\nu} + \frac{\beta}{\omega} \partial^\mu \Phi \partial^\nu \Phi.$$

Quando o campo $\Phi = \Phi(r)$ depende somente de r obtemos

$$ds^2 = \frac{1}{\alpha} dt^2 - B dr^2 - r^2 d\Omega^2,$$

onde

$$B \equiv \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \left(\frac{1}{2\alpha} \frac{d\alpha}{dr} r + 1 \right)^2.$$

A dinâmica do campo na métrica $q_{\mu\nu}$,

$$\square \Phi = 0$$

ou seja

$$\frac{r^2 d\Phi/dr}{\alpha \Sigma} = \text{constant}$$

onde

$$\Sigma = \frac{1 - 3\mu/r + d\mu/dr}{1 - 3\mu/r}.$$

onde fizemos a transformação convencional

$$\alpha = 1 - \frac{2\mu(r)}{r}.$$

Segue que a equação para α se transforma em uma cúbica:

$$\epsilon \sqrt{\alpha} + \frac{1}{\alpha} - \frac{a}{r} = 1.$$

onde ϵ e a são duas constantes independentes. Uma solução foi examinada em exercício anterior (geometria de Schwarzschild) para $\epsilon = 0$. Mostre que a

métrica gravitacional para o caso em que a outra constante se anula $a = 0$ é dada por

$$ds^2 = (1 - \sigma) dt^2 - \frac{(1 - \sigma)}{(1 - 3\sigma/2)^2} dr^2 - r^2 d\Omega^2.$$

Mostre que essa geometria não é plana.

.....

GSG - 5

A dinâmica do campo escalar que determina a interação gravitacional é dada por [65]

$$\sqrt{V} \square \Phi = -\kappa \chi,$$

com

$$V = \frac{(\alpha - 3)^2}{4\alpha^3}$$

onde $\alpha = \exp(-2\Phi)$ e $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$. A fonte χ no caso de um fluido perfeito é dada por

$$\chi = \frac{1}{2} \left(\frac{3e^{2\Phi} + 1}{3e^{2\Phi} - 1} E - T \right).$$

onde T é o traço do tensor momento-energia definido convencionalmente por

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-q}} \frac{\delta(\sqrt{-q} L_m)}{\delta q^{\mu\nu}}.$$

e a expressão de E consiste na projeção

$$E \equiv \frac{T^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi}{\Omega}$$

$$\Omega \equiv \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi q^{\mu\nu}.$$

Definindo o vetor unitário do tipo-tempo

$$I_\mu = \frac{\partial_\mu \Phi}{\sqrt{\Omega}}$$

e, no caso cosmológico onde o campo depende somente do tempo gaussiano o tensor de energia se escreve

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) I^\mu I^\nu - p q^{\mu\nu}.$$

Quando o campo Φ depende somente do tempo e a métrica tem a configuração espacial homogênea e isotrópica. Calcule a evolução do fator de escala. Qual a condição para que exista aceleração? Compare com a situação no caso da relatividade geral.

SOLUÇÕES

GSG – 1

A métrica tem a forma

$$q^{\mu\nu} = \alpha \eta^{\mu\nu} + \frac{\beta}{\omega} \partial^\mu \Phi \partial^\nu \Phi$$

onde

$$\omega = \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi \eta^{\mu\nu}$$

e α e β são funções do campo Φ satisfazendo uma condição única:

$$\alpha + \beta = \alpha^3 V.$$

Para obtermos o limite newtoniano vamos

$$\alpha = \exp(-2\Phi)$$

Calcule a inversa $q_{\mu\nu}$ definida pela relação

$$q_{\mu\lambda} q^{\lambda\nu} = \delta_\mu^\nu.$$

CE – 2

Temos

$$\frac{\alpha' \sqrt{V}}{\alpha} = \frac{A}{R^2}$$

onde A é uma constante e $\alpha' = d\alpha/dR$.

$$ds^2 = \frac{1}{\alpha} dt^2 - \frac{1}{\alpha^3 V} dR^2 - \frac{R^2}{\alpha} d\Omega^2$$

.....

GSG - 3

$$ds^2 = \frac{1}{\alpha} dt^2 - B dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

onde

$$B = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \left(\frac{1}{2\alpha} \frac{d\alpha}{dr} + 1 \right).$$

Pondo

$$\beta = \frac{1}{4} (\alpha - 1)(\alpha - 9)$$

temos

$$V = \frac{(\alpha - 3)^2}{4\alpha^3}$$

e nesse caso a geometria é a de Schwarzschild.

.....

GSG - 4

Pondo

$$\alpha = 1 - \frac{2\mu(r)}{r}$$

a dinâmica do campo Φ tem a forma

$$\square \Phi = 0$$

ou seja

$$\frac{r^2 d\Phi/dr}{\alpha \Sigma} = \text{constant}$$

onde

$$\Sigma = \frac{1 - 3\mu/r + d\mu/dr}{1 - 3\mu/r}.$$

Dai a equação de α é

$$\epsilon \sqrt{\alpha} + \frac{1}{\alpha} - \frac{a}{r} = 1.$$

O valor $\epsilon = 0$ corresponde ao caso $\mu = \text{constante}$ (a massa) gerando a métrica de Schwarzschild onde $\Sigma = 1$.

Consideremos o caso $a = 0$ que gera a solução

$$\mu(r) = \frac{\sigma r}{2}$$

onde σ é constante e o campo tem a forma

$$\Phi = \frac{1}{2} \ln(1 - \sigma).$$

A métrica gravitacional é dada por

$$ds^2 = (1 - \sigma) dt^2 - \frac{(1 - \sigma)}{(1 - 3\sigma/2)^2} dr^2 - r^2 d\Omega^2.$$

Essa geometria não é plana. Em particular temos

$$R^\theta_\theta = R^\varphi_\varphi = \frac{\sigma(9\sigma - 8)}{4(1 - \sigma)r^2}.$$

e então

$$R = -\frac{\sigma(9\sigma - 8)}{2(1 - \sigma)r^2}$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} = R^2.$$

Note que para $\sigma = 0$ o campo gravitacional Φ se anula e a métrica colapsa para a geometria de Minkowski.

GSG – 5

Quando Φ depende so do tempo, a métrica tem a forma

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

onde

$$\exp(-2\Phi) = \alpha = \frac{1}{a^2}.$$

A dinâmica da GSG se escreve:

$$\frac{2}{\kappa} \sqrt{V} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) = - \frac{(2 - 3\lambda + 9\lambda a^2)}{1 - 3a^2} \rho_0 a^{-3(1+\lambda)}.$$

onde a pressão $p = \lambda \rho$.

Na relatividade geral temos a expressão:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = - \frac{\kappa}{6} (1 + \lambda) \rho.$$

14 COSMOLOGIA DE NEUTRINO

Nessa seção construiremos um modelo cosmológico na relatividade geral tendo como fonte um campo spinorial de Dirac. Em seção posterior iremos considerar a teoria spinorial não-linear de Heisenberg na formação de um outro cenário para a cosmologia.

.....

$CN - 1$

Considere a métrica [35]

$$ds^2 = dt^2 - 2A(t)dzdt - C^2(t)(dx^2 + dy^2)$$

Mostre que na relatividade geral essa geometria pode ser gerada por neutrinos livres da forma

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \sigma^1 \phi \end{pmatrix}$$

com

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}.$$

Mostre que a compatibilidade dessa forma do spinor como fonte daquela geometria requer a equação

$$\frac{\ddot{C}}{C} - \frac{\dot{A}}{A} \frac{\dot{C}}{C} = -2 \operatorname{Im}(\phi^+ \dot{\phi})$$

Mostre que as únicas componentes do tensor momento-energia do campo do neutrino são

$$T_{00} = T_{11} = -T_{01} = -8 \operatorname{Im}(\phi^+ \dot{\phi})$$

.....

CN – 2

Base de neutrinos fantasmas: *O estado do neutrino que cria curvatura é composto de estados-fantasmas cada um dos quais não cria curvatura.*

Considere uma solução da equação de Dirac na geometria dada no exercício anterior, tal que $\phi^+ \dot{\phi} = 0$. Pelo que vimos uma tal solução não gera curvatura. Trata-se de um neutrino-fantasma. Como a equação de Dirac é linear, mas o tensor momento-energia do campo do neutrino é não linear, segue que a soma de duas dessas soluções produz curvatura.

Mostre que toda solução do campo de neutrino pode ser construída como combinações desses neutrinos-fantasmas. Isto é, mostre que eles podem gerar uma base completa de soluções da equação do neutrino.

Dessa forma, pode-se afirmar a existência, nessa geometria acima, de uma base de neutrinos-fantasmas, tal que *o estado do neutrino que gera curvatura é composto de uma coleção de estados-fantasmas, cada um dos quais não gera curvatura* [66].

SOLUÇÕES

.....

$CN - 1$

O tensor de energia-momento do campo spinorial é dado por

$$T_{\mu\nu} = \frac{i}{4} \bar{\Psi} \gamma_{(\mu} \nabla_{\nu)} \Psi - \frac{i}{4} \nabla_{(\mu} \bar{\Psi} \gamma_{\nu)} \Psi$$

As únicas componentes do tensor de Ricci dessa métrica são:

$$R_{00} = R_{11} = -R_{01} = -8 \left[\frac{\ddot{C}}{C} - \frac{\dot{A}}{A} \frac{\dot{C}}{C} \right]$$

15 ELETRODINÂMICA NÃO-LINEAR EM ESPAÇOS CURVOS

Vamos examinar agora algumas situações físicas envolvendo teorias não-lineares do eletromagnetismo e a gravitação descrita pela teoria da Relatividade Geral.

.....

ENL – 1

Existem sete tipos diferentes de interação não-minima da campo eletromagnético com a métrica. Quais são eles?

.....

ENL – 2

Considere um campo eletromagnético interagindo minimalmente com a gravitação descrita no esquema da relatividade geral. Calcule o caso estático em que uma carga Q produz um campo elétrico E e o campo gravitacional correspondente.

.....

ENL – 3

Teorias não-lineares do campo eletromagnético permitem realizar estados interpretados como "vazio clássico" onde o tensor de energia do campo pode ser identificado como sendo de uma constante cosmológica. Quais são as condições mínimas para que este estado exista em uma dada teoria $L(F)$?

.....

ENL – 4

Regime assintótico

Considere a teoria do campo eletromagnético controlada pela lagrangiana

$$L = \alpha^2 F^2 - \frac{1}{4} F - \frac{\mu^2}{F} + \frac{\beta^2}{F^2}$$

Examine o comportamento do campo elétrico de uma partícula pontual no infinito espacial desta teoria no caso estático onde $F_{01} = E(r)$ é a única componente não-nula do campo. Mostre que a distribuição da energia é anisotrópica, mas no infinito ela se comporta como uma constante cosmológica se no limite $r \rightarrow \infty$ o campo vai para um valor constante diferente de zero. Se adicionarmos um termo extra na Lagrangiana pode-se eliminar o campo residual constante no infinito. No caso da eletrodinâmica linear de Maxwell esta ambiguidade não aparece.

.....

ENL – 5

Mostre que a teoria não-linear do eletromagnetismo de lagrangiana

$$L = \alpha^2 F^2 - \frac{1}{4} F - \frac{\mu^2}{F} + \frac{\beta^2}{F^2}$$

admite uma solução especial na qual sua distribuição de energia coincide com uma constante cosmológica. Compare com as duas propostas de Born e Infeld de teorias dadas por

$$L_1 = -\beta^2 \sqrt{U}$$

$$L_2 = -\beta^2 \sqrt{U} + \beta^2$$

A escolha de L_2 foi a preferida por eles, baseada na hipótese de que o campo eletromagnético deve ser nulo no infinito espacial.

ENL – 6

Estude o estado do vazio, a solução estática e a positividade da energia da teoria

$$L = -\frac{F}{4} - \frac{\mu^2}{F}.$$

ENL – 7

As equações de Maxwell no vazio são invariantes por rotação dual. Isso significa que a dinâmica do campo não é afetada pela transformação infinitesimal

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \cos \theta F_{\mu\nu} + \sin \theta F_{\mu\nu}^*$$

$$\tilde{F}_{\mu\nu}^* = -\sin \theta F_{\mu\nu} + \cos \theta F_{\mu\nu}^*$$

Com efeito, temos para a Lagrangiana de Maxwell a transformação

$$\tilde{L} = (\cos^2 - \sin^2) L + 2 \cos \theta \sin \theta G.$$

Se θ é constante, então o termo adicional na Ação de Maxwell nada mais é do que uma integral topológica (divergência total) que não contribui (em geral) para a dinâmica do campo. É possível generalizar a rotação dual de tal modo que ela não seja global, mas sim local? Em outras palavras, podemos manter a invariância do eletromagnetismo quando o ângulo de rotação dual for função de ponto? Ver [67].

SOLUÇÕES

.....

ENL – 1

Existem sete tipos diferentes de interação não-minima da campo eletromagnético com a métrica e podemos dividi-los em duas classes:

Classe I (violando a invariância de gauge)

$$L_1 = R W_\mu W^\mu$$

$$L_2 = R_{\mu\nu} W^\mu W^\nu$$

Classe II (preservando a invariância de gauge)

$$L_3 = R F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

$$L_4 = R F_{\mu\nu} F^{\mu\nu*}$$

$$L_5 = R_{\mu\nu} F_\alpha^\mu F^{\alpha\nu}$$

$$L_6 = R^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\nu\mu}$$

$$L_7 = R_{\alpha\beta\mu\nu}^* F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu}$$

Note que a classe I não requer nenhuma constante dimensional para constituir uma lagrangiana; no entanto a classe II requer a introdução de uma constante com dimensão L^2 .

.....

ENL – 2

Solução estática e esfericamente simétrica e o regime assintótico

Temos para a forma da geometria:

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

A única componente não-nula do campo elétrico é dada por

$$F_{01} = E(r)$$

temos então

$$F^{01} = g^{00} g^{11} F_{01} = -e^{-(\nu+\lambda)} E$$

e, conseqüentemente

$$F = -2 e^{-(\nu+\lambda)} E^2.$$

Da expressão do tensor momento-energia dada por

$$T_{\mu\nu} = -4 L_F F_\mu^\alpha F_{\alpha\nu} - L g_{\mu\nu}$$

segue que as únicas componentes não-nulas são:

$$T_{00} = -L e^\nu - 4 L_F e^{-\lambda} E^2$$

$$T_{11} = L e^\lambda + 4 L_F e^{-\nu} E^2$$

$$T_{22} = r^2 L$$

$$T_{33} = r^2 \sin^2\theta L$$

A expressão das componentes do tensor

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$$

é dada por

$$\begin{aligned} G^0_0 &= e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} \\ G^1_1 &= e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} \\ G^2_2 &= \frac{1}{2} e^{-\lambda} \left(\nu'' + \frac{(\nu')^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\lambda' \nu'}{2} \right) \\ G^3_3 &= G^2_2 \end{aligned}$$

As equações da relatividade geral reduzem-se a:

$$e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = L + 4 L_F e^{-(\nu+\lambda)} E^2$$

$$e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = L + 4 L_F e^{-(\nu+\lambda)} E^2$$

$$\frac{1}{2} e^{-\lambda} \left(\nu'' + \frac{(\nu')^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\lambda' \nu'}{2} \right) = L$$

Além destas, tem-se a equação do campo elétrico:

$$\partial_\nu (\sqrt{-g} L_F F^{\mu\nu}) = 0.$$

Usando essas equações obtém-se

$$\nu' + \lambda' = 0.$$

ou seja $\nu + \lambda$ é constante. Segue então que a equação do campo elétrico E coincide com a equação do campo no caso em que a geometria é do tipo de Minkowski, isto é

$$r^2 L_F E = \text{constante}.$$

No caso linear de Maxwell, é possível encontrar imediatamente uma solução completa do sistema acoplado dos campos elétrico e gravitacional dada por

$$\begin{aligned} E &= \frac{Q}{r^2} \\ e^\nu &= 1 - \frac{r_H}{r} + \frac{Q^2 G}{2 c^4 r^2} \end{aligned}$$

onde

$$r_H = 2 G M$$

e G é a constante de Newton.

ENL – 3

Chamamos vazio clássico não-nulo toda solução das equações dinâmicas de uma teoria não-linear representada por uma lagrangiana $L(F)$ que satisfaz as três condições:

- A solução possui o invariante constante, isto é,

$$F = F_\nu;$$

- O valor da Lagrangiana no ponto ν não é zero, isto é,

$$L(F_\nu) \neq 0;$$

- O valor da primeira derivada da Lagrangiana em relação a F no ponto ν é zero, isto é,

$$\left(\frac{dL}{dF} \right)_\nu = 0.$$

Nesse caso, a distribuição de energia do campo é dada por

$$T_{\mu\nu} = L(F_\nu) g^{\mu\nu},$$

ou seja, pode ser interpretada como uma constante cosmológica.

$$ENL - 4$$

O tensor momento-energia tem a forma:

$$T_{\mu\nu} = -L\eta_{\mu\nu} - 4L_F F_{\mu\alpha} F^{\alpha\nu}$$

que, no presente caso onde a única componente não-nula do campo elétrico é dada por $F_{01} = E(r)$ possui a forma anisotrópica

$$\begin{aligned} T_0^0 = T_1^1 &= \frac{1}{4E^4} (48\alpha^2 E^8 + 2E^6 - 6\mu^2 E^2 - 5\beta^2) \\ T_2^2 = T_3^3 &= -\frac{1}{4E^4} (16\alpha^2 E^8 + 2E^6 + 2\mu^2 E^2 + \beta^2) \end{aligned}$$

No regime assintótico, onde $E = E_\infty = E_0$ obtemos

$$16\alpha^2 E_0^4 + E_0^3 - \mu^2 E_0 - \beta^2 = 0.$$

A expressão da distribuição de energia-momento adquire nesse limite a forma diagonal e isotrópica

$$T_0^0 = T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -\frac{1}{4E_0^2} (E_0^3 + 3\mu^2 E_0 + 2\beta^2)$$

que imita a distribuição de energia típica de uma constante cosmológica.

Comentário

Para uma teoria não-linear do eletromagnetismo uma nova possibilidade ocorre no que concerne à esta estrutura no infinito. Isto significa que para uma eletrodinâmica não-linear o fato de o campo se tornar constante no infinito espacial não implica que ele seja nulo. Tal propriedade pode ser traduzida através da seguinte questão formal: qual é o regime assintótico da métrica? Será ela uma geometria do tipo Minkowski ou do tipo deSitter?

Na eletrodinâmica linear a resposta a esta pergunta é conhecida e não coloca nenhuma dúvida: o espaço de Minkowski. O mesmo não pode ser dito no caso

em que o campo auto-interativo é combinado com as equações da relatividade geral. A possibilidade de uma geometria tipo deSitter aparece como uma boa solução, em teorias onde o estado $L_F = 0$ existe. Uma tal situação é melhor explicitada no contexto da cosmologia.

ENL – 5

Uma simples inspeção na equação de movimento da teoria não-linear mostra a existência de uma solução particular tal que a distribuição de energia é a mesma de um estado fundamental do tipo vácuo representado por uma constante cosmológica. De fato,

$$(L_F F^{\mu\nu})_{;\nu} = 0.$$

Consideremos a solução $F = F_0 = \text{constante}$ tal que

$$2\alpha^2 F^4 - \frac{F^3}{4} + \mu^2 F - 2\beta^2 = 0.$$

Esta é a condição que satisfaz a eq. de movimento, uma vez que L_F se anula neste valor F_0 . Neste estado o tensor energia momento toma a forma:

$$T_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu},$$

onde

$$\Lambda = -L(F_0).$$

Esta propriedade é típica da eletrodinâmica não-linear. Uma tal possibilidade não pode estar presente na teoria de Maxwell.

O vácuo fundamental de que falamos acima não existe em todas as teorias não-lineares. Para entender o que acontece nestes casos vamos voltar ao exemplo

da teoria de Born-Infeld. Consideremos a teoria dada por

$$L = -\beta^2 \sqrt{U} \quad (15.1)$$

Neste caso o tensor de energia-momento se escreve

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{U}} F_{\mu}^{\alpha} F_{\alpha\nu} + \left(\frac{G^2}{16\beta^2\sqrt{U}} + \beta^2\sqrt{U} \right) g_{\mu\nu} \quad (15.2)$$

Note que a derivada da Lagrangiana em relação ao invariante F não se anula, pois ela vale

$$L_F = \frac{1}{\sqrt{U}}.$$

Entretanto, quando o campo é nulo, isto é, $F_{\mu\nu} = 0$ aparece um resíduo na energia do tipo

$$T_{\mu\nu}(0) = \beta^2 g_{\mu\nu}.$$

Este valor pode ser excluído da Lagrangiana pois ele não representa um estado fundamental não-nulo para o campo.

De outro modo, quando a teoria for tal que uma solução na qual

$$\left(\frac{dL}{dF} \right)_{\nu} = 0$$

existe e o valor correspondente F_{ν} não é zero, então está-se em presença de um estado legítimo do campo, que chamamos de estado fundamental.

ENL – 6

A equação de movimento assume a forma

$$\left(\left(1 + \frac{2\mu}{F} \right) \left(1 - \frac{2\mu}{F} \right) F^{\mu\nu} \right)_{;\nu} = 0$$

Vazio clássico

Dentre todas as soluções possíveis de uma teoria não-linear uma tem especial relevância. Trata-se daquela que anula a primeira derivada da Lagrangiana em relação ao invariante F . Na teoria que estamos examinando, isso ocorre para

$$F_v^2 = 4\mu^2.$$

Neste estado o tensor momento-energia tem a forma de uma "constante cosmológica" dada por

$$T_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu},$$

Positividade da energia

Da expressão da energia

$$\rho = \left(1 - \frac{4\mu^2}{F^2}\right) E^2 + \frac{F}{4} \left(1 + \frac{4\mu^2}{F^2}\right)$$

vemos que a situação mais perigosa (aquela que permitiria a esta função ρ não ser positiva sempre) ocorre quando só existe o campo elétrico. Fazendo $B = 0$ temos

$$\rho = \frac{E^2}{2} \left(1 - \frac{3\mu^2}{E^4}\right)$$

Neste caso, se $E^4 < 3\mu^2$ então a densidade de energia poderia ser negativa. Isso acarretaria, como vimos acima, que uma dada fonte de carga Q poderia gerar configurações que seriam interpretadas como se esta carga trocasse seu sinal ao passar pelo ponto em que a densidade se anula. Para esclarecer esta situação, vamos examinar o caso do campo gerado por uma carga isolada.

O campo estático de uma carga puntiforme

Pondo

$$F_{01} = E(r)$$

como a única componente não-nula do campo, temos para a equação de E em um sistema de coordenadas esférico

$$L_F E r^2 = \text{constante}$$

No caso em questão,

$$E - \frac{\mu^2}{E^3} = \frac{Q}{r^2}$$

Segue daí que

- Quando $r \rightarrow 0$, então $E \rightarrow \infty$;
- Quando $r \rightarrow \infty$, então $E^4 \rightarrow \mu^2$;

Note que o limite do campo na região assintótica fica determinado pelo valor da constante μ . Vemos então que o campo – uma função monótona – diverge na origem ($r = 0$) e tende assintoticamente (quando $r \rightarrow \infty$) para o valor mínimo $E_\infty^4 = \mu^2$.

Isso significa que a Lagrangiana neste valor mínimo do campo não se anula. No caso da teoria linear de Maxwell, o valor mínimo é zero e neste valor a Lagrangiana se anula, assim como a densidade de energia. Para que o mesmo ocorra aqui, nós iremos adicionar — ao estilo Born-Infeld — uma constante na Lagrangiana que passa a ser dada por

$$L = -\frac{F}{4} - \frac{\mu^2}{F} - \mu$$

Assim, a densidade de energia tem o valor

$$\rho = \frac{E^2}{2} - \frac{3\mu^2}{2E^2} + \mu$$

No limite assintótico, quando o campo vai para a constante E_∞ a densidade de energia vai para zero.

.....

ENL – 7

Em geral, desde o artigo seminal de Yang e Mills de 1954, tem sido costume realizar uma tal extensão de uma simetria global para uma simetria local, através do chamado mecanismo de gauge. Exemplo mais simples é o da simetria $U(1)$. Consideremos a teoria do eletrón cuja dinâmica é dada pela lagrangiana

$$L = \hbar c \left(\frac{i}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - \frac{i}{2} \partial_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi - \mu \bar{\Psi} \Psi \right)$$

obtendo-se assim a equação de Dirac

$$i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - \mu \Psi = 0$$

que é invariante pela transformação

$$\tilde{\Psi} = e^{i\theta} \Psi,$$

Se fizermos a constante θ depender de ponto, vemos que a teoria não é mais invariante. O modo mais simples de preservar a invariância consiste em introduzir um campo eletromagnético cuja interação com o eletrón seja feita através do chamado acoplamento mínimo. Isto significa que a derivada simples ∂_μ que aparece na teoria do eletrón seja alterada para uma derivada covariante D_μ pela construção

$$D_\mu \Psi \equiv (\partial_\mu - i e A_\mu) \Psi$$

É imediato ver que um tal procedimento não pode ser aplicado diretamente aqui, no caso da generalização da rotação dual. Nós iremos então prosseguir de um modo diferente, mais próximo do que vimos atrás envolvendo acoplamento não-mínimo. Começamos por introduzir um campo escalar complexo Φ definido em termos de dois campos reais ϕ e η pela relação

$$\Phi = \phi + i \eta.$$

Consideremos o acoplamento não-mínimo entre o campo vetorial e este campo escalar dado pela Lagrangiana

$$L = \phi F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \eta F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}^*$$

Esta dinâmica é invariante por transformação dual para um ângulo de rotação dependente de ponto $\theta(x)$ se ao mesmo tempo o campo escalar sofrer uma transformação dada por

$$\tilde{\Phi} = \exp(-2i\theta) \Phi$$

ou seja, pela rotação

$$\tilde{\phi} = \cos(2\theta) \phi + \sin(2\theta) \eta$$

$$\tilde{\eta} = -\sin(2\theta) \phi + \cos(2\theta) \eta$$

A Lagrangiana acima deve ser implementada pela dinâmica do campo escalar. Para isso podemos usar a Lagrangiana

$$L_{\Phi} = \partial_{\mu} \Phi^* \partial^{\mu} \Phi$$

Note entretanto que esta parte da dinâmica não é invariante pela rotação do campo escalar. Podemos prosseguir se aceitarmos que a interação entre o campo escalar e o campo vetorial tem, além daquele termo não-mínimo um termo de acoplamento mínimo. Com efeito, pondo

$$L = \phi F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \eta F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}^* + D_{\mu} \Phi^* D^{\mu} \Phi$$

Esta dinâmica é, com efeito invariante pela rotação dual do campo vetorial e a rotação do campo escalar. Este resultado é curioso, pois o que acabamos de mostrar pode ser resumido a seguinte forma: uma transformação de gauge de um campo escalar Φ requer a introdução de um campo (vetorial) de gauge $F_{\mu\nu}$ para que esta transformação seja dependente de posição. Por outro lado, uma rotação dual local (isto é, dependente de posição) do campo vetorial para que tenha sua dinâmica preservada por esta transformação requer um acoplamento não-mínimo com um campo escalar, que pode ser o mesmo campo Φ . No primeiro caso, quem permite a invariância da teoria é o conhecido mecanismo de Yang-Mills. No segundo caso quem re-estabelece a invariância da teoria é o campo escalar.

16 EFEITOS COSMOLÓGICOS DA ELE- TRODINÂMICA NÃO-LINEAR

Comentário

Os efeitos de uma teoria do campo eletromagnético não-linear em um contexto cosmológico foram estudados em vários artigos [10]. Processos não-lineares tem grande relevância em três questões fundamentais na cosmologia relativista [58, 59]:

- Causalidade;
- Singularidade;
- Aceleração do universo.

Nós iremos ver que na teoria linear do eletromagnetismo a singularidade cosmológica é inevitável. Isso não ocorre nas teorias não-lineares. A forma geral da dinâmica do campo eletromagnético, compatível com princípios da covariância e conservação da carga (invariância de "gauge") pode ser escrita sob a forma

$$L = L(F, G),$$

onde $F \equiv F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ e $G \equiv F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^*$ construído com o dual. Em geral estes campos aparecem sempre sob forma de média (cf adiante) e nos cenários de universo padrão somente o invariante F é considerado. Assim, a Lagrangiana aparece como uma função regular que pode ser aproximada por um polinômio ou por

uma série contendo potências positiva e negativa (série de Laurent). Potências positivas são importante e dominam a dinâmica gravitacional na vizinhança de seus momentos de curvatura extremamente elevada. Potências negativas de F controlam o outro extremo, isto é, no caso de campos extremamente fracos [59]. No primeiro caso, ela pode influenciar de tal modo a produzir um "bouncing" e evitar a singularidade inicial; no segundo caso, modifica a evolução da geometria cósmica para grandes valores do seu fator de escala e produzir aceleração.

Os exercícios aqui propostos se enquadram na geometria do tipo Friedman. Ademais, consideraremos na média sobre os campos somente a parte magnética. Ver argumentos apresentados em [68]. Uma tal configuração de puro campo magnético médio combinado com a dinâmica das equações da Relatividade Geral recebeu o nome genérico de Universo Magnético [novello3].

O procedimento da média e a representação do fluido

Dada uma Lagrangiana independente de calibre $L = L(F)$, escrita em termos do invariante $F \equiv F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ segue que o tensor momento-energia associado, definido por

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta L \sqrt{-g}}{\delta \gamma^{\mu\nu}},$$

reduz-se a

$$T_{\mu\nu} = -4 L_F F_{\mu}^{\alpha} F_{\alpha\nu} - L g_{\mu\nu}.$$

No cenário cosmológico padrão a estrutura métrica do espaço-tempo é associada à geometria de FRW. Por compatibilidade com o cenário cosmológico, isto

é, de forma a se obter uma configuração homogênea e isotrópica da geometria, um processo de média deve ser utilizado sobre os campos.

Definimos uma média a quantidade X no tempo t pela relação

$$\bar{X} \equiv \lim_{V \rightarrow V_0} \frac{1}{V} \int X \sqrt{-g} d^3x,$$

onde $V = \int \sqrt{-g} d^3x$ e V_0 é um tri-volume suficientemente grande, dependente do tempo. Nesta notação, para que o campo eletromagnético seja fonte do modelo de Friedmann precisamos impor

$$\bar{E}_i = 0, \quad \bar{H}_i = 0, \quad \overline{E_i H_j} = 0,$$

$$\overline{E_i E_j} = -\frac{1}{3} E^2 g_{ij}, \quad \overline{H_i H_j} = -\frac{1}{3} H^2 g_{ij}.$$

Com estas condições, o tensor momento-energia do campo EM associado a Lagrangiana $L = L(F)$ pode ser escrito como aquele de um fluido perfeito

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)v_\mu v_\nu - p g_{\mu\nu},$$

onde

$$\begin{aligned} \rho &= -L - 4L_F E^2, \\ p &= L - \frac{4}{3}(2H^2 - E^2)L_F, \end{aligned}$$

e $L_F \equiv dL/dF$.

.....

UNIVERSO MAGNÉTICO

Um caso particularmente interessante ocorre quando somente a média do campo magnético não se anula, isto é, quando $E^2 = 0$. Este caso vem sendo intensamente estudado em modelos cosmológicos chamados *Universo Magnético* que

iremos agora examinar. Uma tal propriedade é possível no caso da cosmologia, pois no universo primordial o campo elétrico é amortecido pelas cargas do plasma primordial, enquanto as linhas de campo magnético permanecem “congeladas” [68]. Independentemente deste fato, em [59] certa atenção foi dada ao caso em que $E^2 = \sigma^2 B^2 \neq 0$.

Uma propriedade interessante do Universo Magnético se deve a que ele pode ser associado a um conjunto de fluidos perfeitos, sem interação como os exercícios a seguir irão mostrar.

.....

ECNLE – 0

Mostre que é possível construir um cenário cosmológico tendo o campo eletromagnético como fonte e possuindo as seguintes características:

- A geometria do universo é controlada por um campo magnético (médio);
- No infinito passado a sua distribuição de energia, representado pelo regime assintótico do campo magnético é equivalente a uma constante cosmológica;
- A configuração inicial é instável: o universo começa a colapsar;
- A contração para ao atingir um valor mínimo do fator de escala $a_{min} = a_b$;
- Neste estado a densidade de energia tem um mínimo;
- A seguir, começa uma fase de expansão acelerada;
- O final desse universo consiste em uma configuração semelhante ao início, isto é, um fluido perfeito com $\rho + p = 0$, e o volume tende ao infinito.

ECNLE – 1

Mostre o seguinte resultado: Toda teoria não-linear do campo Eletromagnético cuja Lagrangiana é da forma $L = L(F)$ em um contexto cosmológico do tipo universo magnético se caracteriza pelo fato de que o campo magnético B possui a mesma dependência com o fator de escala, $B = B_0 a^{-2}$, independentemente da função específica da Lagrangiana $L(F)$.

ECNLE – 2

Esta propriedade acima implica que para cada potencia F^k na lagrangiana

$$L = \sum c_k F^k$$

é possível associar uma configuração de fluido específica com densidade de energia ρ_k e pressão p_k . Qual a correspondente equação de estado?

.....

ECNLE – 3

Além da equação de conservação, a outra equação da RG se escreve

$$\rho = 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{3\epsilon}{a^2}$$

ou seja

$$(\dot{a})^2 + V = \epsilon$$

com

$$V = -\frac{\rho a^2}{3}.$$

Essa dinâmica pode ser interpretada como a equação de uma partícula submetida a um potencial V com energia total dada por ϵ . No universo magnético a densidade de energia é dada por

$$\rho = -L.$$

Qual deve ser a dependência da Lagrangiana com o invariante do campo da teoria não-linear para que o potencial tenha uma forma especificada?

.....

ECNLE – 4

Vamos considerar o modelo descrito pela Lagrangiana

$$L_F = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = \alpha^2 F^2 - \frac{1}{4} F - \frac{\mu^2}{F} + \frac{\beta^2}{F^2},$$

onde α, β, μ são parâmetros arbitrários. Mostre que essa lagrangiana dá origem a um universo magnético gerado por quatro fluidos independentes. Qual a respectiva expressão das densidades de energia e pressão?

Esse modelo permite fases de bouncing e de aceleração. Quais as condições para que exista um bounce? Quais as condições para que a expansão do universo seja acelerada? O valor máximo da densidade ρ não acontece necessariamente no bouncing. Por que?

Compare esse cenário completo gerado por L_F com os três casos particulares:

- caso a: $\alpha = 0$;
- caso b: $\mu = 0$;
- caso c: $\beta = 0$

Mostre que a densidade total de energia no modelo cosmológico em questão é sempre positiva e bem definida. Mostre que o universo é uma estrutura cíclica, tendo suas características sintetizadas da seguinte forma:

- Passo 1: o universo contém uma fase de colapso na qual o fator de escala alcança um mínimo $a_B(t)$;
- Passo 2: após o ricochete o universo expande com $\ddot{a} < 0$;
- Passo 3: quando o fator $1/F$ domina o universo entra em uma fase de regime acelerado;

- **Passo 4:** quando $1/F^2$ domina a aceleração muda de sinal e começa uma fase na qual $\ddot{a} < 0$ uma vez mais, o fator de escala alcança um máximo e aparece um novo ricochete, começando uma nova fase de colapso;
- **Passo 5:** o universo repete o mesmo processo, passando pelos passos 1, 2, 3 e 4 novamente e assim por diante, indefinidamente.

.....

ECNLE – 5

Mostre que o sistema combinado de equações da métrica cósmica e do campo magnético descrito pela relatividade geral (RG) e pela teoria não linear da eletrodinâmica (NLED) permite o aparecimento de uma bela conspiração: as contribuições negativas à densidade total de energia, oriundas dos termos L_1 e L_4 nunca superam as contribuições positivas vindas de L_2 and L_3 . Antes de se alcançar os valores indesejáveis onde a densidade de energia poderia ser negativa, o universo “ricocheteia” (para valores enormes do campo) e “re-ricocheteia” (para valores mínimos do campo) evitando precisamente esta dificuldade. Mostre essa afirmação.

.....

ECNLE – 6

Passemos agora às condições genéricas necessárias para que o universo apresente um bouncing (ricochete) e uma fase de expansão acelerada. Das equações da relatividade geral segue que a aceleração está relacionada com o seu conteúdo material pela relação

$$3\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2}(\rho + 3p).$$

Assim, para que o universo tenha uma aceleração a matéria precisa satisfazer o vínculo $(\rho + 3p) < 0$. No caso da teoria não-linear da questão anterior estude as condições para que isso ocorra.

.....

ECNLE – 7

Dualidade no Universo Magnético como consequência da simetria inversa

O cenário cosmológico apresentado no exercício anterior lida com uma geometria espacialmente homogênea e isotrópica que apresenta um comportamento simétrico para valores pequenos e grandes do fator de escala. Este cenário é possível quando o comportamento da fonte de curvatura para altas energias é o mesmo que no regime fraco. Isto se dá precisamente no caso do universo magnético que estamos considerando. Mostre que para se obter uma configuração perfeitamente simétrica devemos aceitar o Princípio de Simetria Inversa que requer que a teoria não-linear da eletrodinâmica deve ser invariante pela ação da transformação

$$F \rightarrow \tilde{F} = \frac{cte}{F}.$$

.....

ECNLE – 8

Mostre que essa transformação de simetria nada mais é do que uma transformação conforme.

.....

ECNLE – 9

É possível examinar os efeitos do universo magnético controlado pela Lagrangiana acima fazendo uma análise qualitativa usando analogia com a mecânica clássica. A equação de Friedmann reduz-se a

$$\dot{a}^2 + V(a) = 0$$

onde

$$V(a) = \frac{M}{a^6} - \frac{N}{a^2} - Pa^6 + Qa^{10}$$

é um potencial que restringe o movimento da localização $a(t)$ de uma "partícula". As constantes em V são dadas por

$$M = \frac{4\alpha^2 B_0^4}{3}, \quad N = \frac{B_0^2}{6}, \quad P = \frac{\mu^2}{6B_0^2}, \quad Q = \frac{4\alpha^2 \mu^4}{3B_0^4},$$

e são positivas. A dependência do campo como $B = B_0/a^2$ implica na existência de quatro épocas distintas. Quais são elas?

ECNLE – 10

Universo quase-magnético

Alguns autores argumentam em favor do princípio de equipartição impondo entre a média do campo elétrico E e a média do campo magnético B a relação

$$E^2(t) = B^2(t) = \epsilon(t).$$

Como extensão dos casos examinados atrás de universo magnético, consideraremos agora o caso geral

$$E^2 = \sigma^2 B^2$$

onde σ pode no máximo depender do tempo. A expressão do invariante que nos interessa assume a forma

$$F = 2(1 - \sigma^2) B^2$$

A densidade de energia se escreve (no caso geral $L = L(F)$) como

$$\begin{aligned} \rho &= -L - 4E^2 L_F \\ p &= L + \frac{4}{3}(E^2 - 2B^2) L_F \end{aligned}$$

Pondo

$$L = \sum c_k F^k$$

temos

$$\rho = \sum c_k F^k \left(-1 - \frac{2\sigma^2}{1-\sigma^2} k \right)$$

$$p = \sum c_k F^k \left(1 + \frac{2}{3} \frac{\sigma^2 - 2}{1-\sigma^2} k \right)$$

Escrevendo

$$\rho = \sum \rho_k$$

$$p = \sum p_k$$

e definindo uma "equação de estado" como

$$p_k = \lambda_k \rho_k$$

encontramos

$$\lambda_k = -\frac{1}{3} \left(\frac{3(1-\sigma^2) + 2k(\sigma^2-2)}{1-\sigma^2 + 2\sigma^2 k} \right).$$

O traço do tensor de energia-momento é dado por

$$T = \rho - 3p = 4 \sum c_k F^k (k-1).$$

Alguns comentários sobre esta relação.

- Quando a teoria for linear, isto é, o domínio de k se reduz ao valor $k = 1$, a equação de estado independe do valor de σ .
- Quando valer a equipartição ($\sigma = 1$) tem-se

$$\lambda_k = \frac{1}{3} \left(\frac{2k-1}{k} \right)$$

O caso Born-Infeld

Embora a teoria Born-Infeld seja não-polinomial, podemos considerar o efeito de $\sigma \neq 0$ na teoria dada por

$$L = \beta^2 (1 - \sqrt{U})$$

onde U tem a expressão convencional $U = 1 + F/2 \beta^2$. Calcule o cenário cosmológico nesse caso.

.....

ECNLE – 11

Dinâmica

No caso de lagrangiana polinomial separamos as densidades por suas dependências com o parâmetro k que caracteriza a potência da função do campo F . Resta agora considerar a dependência da conservação de energia com este parâmetro. No caso em que $\sigma = 0$ e que chamamos universo magnético, vimos que cada termo pode ser entendido como um fluido independente e consequentemente se conserva, posto que não existe interação entre as partes. Como se altera essa situação quando σ não for zero?

.....

$$ECNLE - 12$$

Sistema Dinâmico

Vimos que o cenário cosmológico de Friedman reduz o conjunto de equações da relatividade geral a somente duas, a saber, a lei de conservação da energia (envolvendo somente a derivada temporal da densidade de energia) e a equação de Raychaudhuri de evolução do parâmetro de expansão Θ . Essas duas equações constituem um sistema dinâmico planar autônomo da forma

$$\dot{\rho} = f_1(\rho, \Theta)$$

$$\dot{\Theta} = f_2(\rho, \Theta)$$

Mostre que é possível fazer uma transformação de variáveis definindo (Q, P) em termos das antigas (ρ, θ) que permite definir uma Hamiltoniana H em termos das novas variáveis, pois em geral ρ e θ , não são variáveis canonicamente conjugadas.

SOLUÇÕES

.....

ECNLE – 1

Consideramos a geometria da forma (note que limitaremos nossa análise à seção euclídeana)

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 (dr^2 + r^2 d\Omega^2).$$

O fator de expansão θ tem a forma

$$\theta \equiv v^\mu_{;\mu} = 3 \frac{\dot{a}}{a}$$

A conservação do tensor momento-energia projetado na direção da velocidade co-movente $v^\mu = \delta_0^\mu$ gera a relação

$$\dot{\rho} + (\rho + p)\theta = 0.$$

Usando a Lagrangiana acima $L(F)$ no caso do universo magnético tem-se, para a densidade de energia e pressão as equações:

$$\rho = -L$$

$$p = L - \frac{8}{3} B^2 L_F$$

onde

$$F = 2B^2$$

Substituindo estes valores na lei de conservação tem-se

$$L_F \left[(B^2) \dot{ } + 4 B^2 \frac{\dot{a}}{a} \right] = 0$$

onde $L_F \equiv \partial L / \partial F$, que completa a demonstração de que a evolução do campo magnético em termos do fator de expansão é dado por $B = B_0 a^{-2}$.

.....

ECNLE – 2

$$p_k = \left(\frac{4k}{3} - 1 \right) \rho_k.$$

.....

ECNLE – 4

$$\begin{aligned}
 \rho_1 &= -\alpha^2 F^2, & p_1 &= \frac{5}{3}\rho_1 \\
 \rho_2 &= \frac{1}{4}F, & p_2 &= \frac{1}{3}\rho_2 \\
 \rho_3 &= \frac{\mu^2}{F}, & p_3 &= -\frac{7}{3}\rho_3 \\
 \rho_4 &= -\frac{\beta^2}{F^2}, & p_4 &= -\frac{11}{3}\rho_4
 \end{aligned}$$

Usando a dependência do campo na equação do fator de escala encontramos

$$\begin{aligned}
 \rho_1 &= -4\alpha^2 B_0^4 \frac{1}{a^8} \\
 \rho_2 &= \frac{B_0}{2} \frac{1}{a^4} \\
 \rho_3 &= \frac{\mu^2}{2B_0^2} a^4 \\
 \rho_4 &= -\frac{\beta^2}{4B_0^4} a^8.
 \end{aligned}$$

Segue daí que podemos distinguir diferentes "eras" dependendo do valor do fator de escala. Quando $a(t)$ for muito pequeno, o termo dominante provém da Lagrangiana L_1 e quando este fator for muito grande quem controla a evolução é L_4 ; os outros dois termos disputam a predominância no intervalo entre estes extremos. É importante ressaltar uma propriedade notável do sistema combinado envolvendo esta teoria não linear da eletrodinâmica e as equações de Friedmann para a evolução cósmica: a inspeção das expressões para os valores da densidade de energia exibe o que poderia ser uma possível dificuldade deste sistema em situações extremas, isto é, quando os termos F^2 e $1/F^2$ dominam. Afinal, lembremos que se o raio do universo pode atingir valores arbitrariamente pequenos e/ou arbitrariamente grandes, deveríamos nos perguntar sobre a questão da positividade da energia ao longo da evolução. Essa questão é examinada no exercício seguinte.

ECNLE – 5

Isto ocorre no limite $\rho_B = \rho_{RB} = 0$, como se pode ver da equação

$$\rho = \frac{\theta^2}{3}.$$

Cumpramos ressaltar que esta não é uma condição extra imposta a mão, mas uma consequência direta da dinâmica descrita por $L(F)$. De fato, em estágios remotos da fase de expansão a dinâmica é controlada pela Lagrangiana aproximada $L_T \approx L_{1,2} = L_1 + L_2$. Segue então o resultado

$$\rho = \frac{F}{4} (1 - 4\alpha^2 F).$$

Usando a lei de conservação concluímos que a densidade de energia será sempre positiva uma vez que existe um valor mínimo para o fator de escala dado por $a_{mim}^4 = 8\alpha^2 B_o^2$. Uma conspiração similar acontece no outro extremo quando $a(t)$ é muito grande e pode-se aproximar $L_T \approx L_{2,3} = L_2 + L_3$, que mostra que a densidade permanece positiva e definida, já que $a(t)$ permanece limitado, alcançando um máximo no momento em que a solução apresenta um *ricochete*. Este extremo ocorre precisamente nos pontos onde a densidade total se anula.

.....

ECNLE – 6

Temos que $(\rho + 3p) < 0$ translada-se para

$$L_F > \frac{L}{4B^2}.$$

Segue que qualquer teoria não-linear da eletrodinâmica que satisfaça esta desigualdade gera uma expansão acelerada. No presente modelo os termos L_2 e L_4 produzem aceleração negativa; L_1 e L_3 geram regimes inflacionários ($\ddot{a} > 0$). No caso da Lagrangiana L_F acima temos:

$$\rho + 3p = -6\alpha^2 F^2 + \frac{F}{2} - \frac{6\mu^2}{F} + \frac{10\beta^2}{F^2}.$$

Para se analisar as condições de existência de um bouncing (ricochete) é conveniente re-escrever a equação para a aceleração usando explicitamente o fator de expansão θ , a equação de Raychaudhuri:

$$\dot{\theta} + \frac{1}{3}\theta^2 = -\frac{1}{2}(\rho + 3p)$$

Além das condições acima para a existência de aceleração, restrições adicionais para $a(t)$ aparecem. A existência de um mínimo (ou máximo) para o fator de escala implica que no ponto de ricochete a inequação $(\rho_B + 3p_B) < 0$ (ou, respectivamente, $(\rho_B + 3p_B) > 0$) deve ser satisfeita. Note que no extremo (máximo ou mínimo) do fator de escala a densidade de energia se anula. Esta é uma consequência direta da primeira integral na equação de Friedmann.

.....

ECNLE – 7

Ao aceitarmos o Princípio de Simetria Inversa segundo o qual a teoria não-linear da eletrodinâmica deve ser invariante pela ação da transformação

$$F \rightarrow \tilde{F} = \frac{cte}{F}$$

para a Lagrangiana em questão deve-se escolher a constante como $4\mu^2$. Isto restringe o número de parâmetros livres de três para dois, uma vez que a aplicação

direta deste princípio acarreta $\beta^2 = 16\alpha^2\mu^4$. Esta simetria induz uma simetria correspondente para a geometria. De fato, a dinâmica cosmológica é invariante pela ação deste mapa dual

$$a(t) \rightarrow \tilde{a}(t) = \frac{B_0}{\sqrt{\mu}} \frac{1}{a}$$

Esta invariância implica em uma estrutura cíclica no cenário cosmológico.

ECNLE – 8

Define-se um tempo conforme – representado pela letra grega η pela relação

$$dt = a(\eta) d\eta.$$

Usando este tempo conforme, a geometria toma a forma

$$ds^2 = a(\eta)^2 (d\eta^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2).$$

Então, realizando o mapa conforme que consiste numa aplicação da métrica $g_{\mu\nu}$ em uma outra $\tilde{g}_{\mu\nu}$ tem-se:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \omega^2 g_{\mu\nu}$$

onde $\omega = \lambda/a^2$, and $\lambda \equiv B_0/\sqrt{\mu}$.

Note que, ainda que a Lagrangiana L_T não seja invariante por uma transformação conforme, o processo de médias usado para se compatibilizar a dinâmica do

campo eletromagnético com a geometria de Friedmann é invariante. De fato, temos

$$\tilde{F} = \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{g}^{\alpha\beta} F_{\alpha\mu} F_{\beta\nu} = \frac{4\mu^2}{F}.$$

.....

ECNLE – 9

As quatro eras do Universo Magnético

A dinâmica do universo magnético pode ser obtida qualitativamente da análise das equações de Einstein. Distinguimos quatro períodos distintos de acordo com o domínio energético de cada um deles.

O regime mais remoto (controlado pelo termo F^2); a era de radiação (onde a equação de estado $p = 1/3\rho$ controla a expansão); a evolução acelerada em terceiro período (onde o termo do tipo $1/F$ é o mais importante) e finalmente a última era, onde $1/F^2$ domina e a expansão termina, o universo passando por um *re-bounce* e entrando em uma era de colapso. Vamos exibir cada uma delas.

Era de ricochete

No limite de campo forte o valor da curvatura escalar é pequeno e o volume do universo alcança um mínimo, a densidade de energia e a pressão são dominadas pelos termos quadráticos F^2 e tem a forma aproximada

$$\rho \approx \frac{B^2}{2} (1 - 8\alpha^2 B^2)$$

$$p \approx \frac{B^2}{6} (1 - 40\alpha^2 B^2).$$

Usando a dependência $B = B_o/a^2$, obtemos

$$\dot{a}^2 = \frac{kB_o^2}{6a^2} \left(1 - \frac{8\alpha^2 B_o^2}{a^4} \right) - \epsilon.$$

Lembremos que estamos examinando aqui a seção euclideana ($\epsilon = 0$). Contanto que o lado de direito dessa equação não seja negativo, segue que o fator de escala $a(t)$ não pode se tornar arbitrariamente pequeno. De fato, a solução é dada como

$$a^2 = B_o \sqrt{\frac{2}{3} (t^2 + 12\alpha^2)}.$$

O período de radiação pode ser obtido da equação acima escolhendo $\alpha = 0$. Como consequência, o campo magnético B evolui no tempo como

$$B^2 = \frac{3}{2} \frac{1}{t^2 + 12\alpha^2}.$$

Note que em $t = 0$ o fator de escala do universo alcança um valor mínimo no *bounce*

$$a_B^2 = B_o \sqrt{8\alpha^2}.$$

Consequentemente, o valor a_B depende de B_o , que para um dado α , μ torna-se o único parâmetro livre do modelo. A densidade de energia ρ alcança seu máximo para o valor $\rho_B = 1/64\alpha^2$ no instante $t = t_B$, onde

$$t_B = \sqrt{12\alpha^2}.$$

Para valores pequenos de t a densidade de energia decresce, se anulando em $t = 0$, enquanto a pressão torna-se negativa. Apenas para valores muito pequenos do tempo $t < \sqrt{4\alpha^2/k}$ os efeitos não-lineares são relevantes para a solução

cosmológica para o fator de escala normalizado. De fato, a solução acima é a expressão do caso de Maxwell no limite de grandes tempos.

Era de Radiação

O termo padrão de Maxwell domina em regimes intermediários. Graças à dependência a^{-2} no campo, esta fase é definida por $B^2 \gg B^4$ gerando a aproximação

$$\rho \approx \frac{B^2}{2}$$

$$p \approx \frac{B^2}{6}.$$

Esta fase é dominada pelo regime linear do campo eletromagnético. Suas propriedades são as mesmas daquelas descritas no modelo cosmológico padrão.

Era de aceleração: campos fracos propulsionam a geometria

Quando o universo torna-se maior, potências negativas de F dominam e a distribuição de energia se torna típica de um universo acelerado, isto é:

$$\rho \approx \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{B^2}$$

$$p \approx \frac{-7}{6} \frac{\mu^2}{B^2}$$

No regime intermediário entre o regime de radiação e aceleração o conteúdo de energia é descrito pela forma combinada

$$\rho = \frac{B^2}{2} + \frac{\mu^2}{2} \frac{1}{B^2},$$

ou, em termos do fator de escala

$$\rho = \frac{B_0^2}{2} \frac{1}{a^4} + \frac{\mu^2}{2B_0^2} a^4.$$

Para a suficientemente pequeno e o termo de radiação quem domina. O termo $1/F$ apenas supera depois de $a = \sqrt{H_0}/\mu$, e deveria crescer sem limites em tempos posteriores. De fato, o escalar de curvatura é

$$R = T^\mu_\mu = \rho - 3p = \frac{4\mu^2}{B_0^2} a^4,$$

mostrando que se deveria esperar uma singularidade da curvatura no futuro do universo onde $a \rightarrow \infty$. No entanto, a presença do termo $1/F^2$ altera este comportamento. Com efeito, usando esta densidade de matéria temos

$$3\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{B_0^2}{2} \frac{1}{a^4} - \frac{3\mu^2}{2B_0^2} a^4 = 0.$$

Para se obter um regime de expansão acelerada, deveremos ter

$$\frac{B_0^2}{a^4} - 3\frac{\mu^2}{B_0^2} a^4 < 0,$$

implicando que o universo irá se acelerar para $a > a_c$, com

$$a_c = \left(\frac{B_0^4}{3\mu^2} \right)^{1/8}.$$

Re-Bouncing

Para valores muito grandes do fator de escala a densidade de energia pode ser aproximada por

$$\rho \approx \frac{\mu^2}{F} - \frac{\beta^2}{F^2}$$

e se passa do regime acelerado para uma fase na qual a aceleração é negativa. Quando o campo alcança o valor $F_{RB} = 16\alpha^2\mu^2$ o universo altera sua expansão para uma fase de colapso. O fator de escala alcança um máximo

$$a_{max}^4 \approx \frac{H_0^2}{8\alpha^2\mu^2}.$$

.....

ECNLE – 10

O procedimento da média que estamos adotando permite escrever

$$\langle \Phi(F) \rangle = \Phi(\langle F \rangle).$$

Consequentemente, encontramos

$$\rho = \frac{F}{2\sqrt{U}} \frac{1}{1-\sigma^2}$$

$$p = -\frac{F}{6\sqrt{U}} \frac{1-2\sigma^2}{1-\sigma^2}$$

onde

$$F = 2(1-\sigma^2)B^2.$$

Dai

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{3}(2\sigma^2 - 1)$$

Note que quando for válida a relação de equipartição tem-se

$$\rho = \frac{B^2}{\sqrt{U}}$$

$$p = \frac{1}{3} \frac{B^2}{\sqrt{U}}.$$

isto é,

$$p = \frac{1}{3} \rho.$$

Este resultado é consequência do fato que na equipartição vale $F = 0$. Note também que o sinal da equação de estado depende do valor de σ . Com efeito, chamando $\lambda = p/\rho$ temos

- Quando

$$\sigma^2 > \frac{1}{2} \rightarrow \lambda > 0.$$

- Quando

$$\sigma^2 < \frac{1}{2} \rightarrow \lambda < 0.$$

.....

ECNLE – 11

Durantes os períodos de *bounce* e *re-bounce* ela toma os valores $\rho_B = \rho_{RB} = 0$. Nestes pontos a densidade é um extremo. De fato, ambos os pontos são mínimos da densidade. Note que

$$\ddot{\rho}_B = \frac{3}{2} p_B^2 > 0.$$

Portanto, deve existir outro extremo de ρ que deve ser um máximo. Este é, de fato, o caso uma vez que existe um valor no domínio de evolução do universo entre dois mínimos tal que

$$\rho_c + p_c = 0.$$

Neste ponto temos

$$\ddot{\rho} + \dot{p}_c \theta_c = 0$$

mostrando que, neste ponto c a densidade toma seu valor máximo. Pode-se então obter diretamente o comportamento do fator de escala que deixaremos como exercício para o leitor.

.....

ECNLE – 11

Temos

$$E^2 = \sigma^2 B^2 = \frac{\sigma^2}{2(1 - \sigma^2)} F.$$

Derivando em relação ao tempo as expressões da densidade e da pressão temos

$$\dot{\rho} = -\frac{L_F \dot{F}}{1 - \sigma^2} \left(1 + \sigma^2 + 2\sigma^2 \frac{F L_{FF}}{L_F} \right)$$

Temos também

$$\rho + p = -\frac{4}{3} \left(\frac{1 + \sigma^2}{1 - \sigma^2} \right) F L_F.$$

Daí

$$\frac{\dot{F}}{F} \left(1 + \frac{2\sigma^2}{1 + \sigma^2} \frac{F L_{FF}}{L_F} \right) + 4 \frac{\dot{a}}{a} = 0.$$

Chamando $y = B^2$ podemos re-escrever esta equação sob a forma

$$\frac{\dot{y}}{y} \Phi = -4 \frac{\dot{a}}{a},$$

onde

$$\Phi = 1 + \frac{4\sigma^2(1 - \sigma^2)}{1 + \sigma^2} \frac{L_{FF}}{F_F} y.$$

Assim, podemos integrar esta expressão, dada a Lagrangiana, e obter a dependência do campo com o fator de escala.

Consideremos como exemplo o caso da correção de Euler-Heisenberg dada por

$$L = -\frac{1}{4} F + \alpha F^2.$$

Um cálculo direto nos dá

$$\Phi = \frac{1 + \sigma^2 - 16\alpha(1 - \sigma^2)(1 + 3\sigma^2)y}{1 + \sigma^2 - 16\alpha(1 - \sigma^4)y}$$

Chamando

$$I = \int \frac{\Phi}{y} dy$$

temos que

$$I = -4 \log a.$$

Resta então calcular I .

Temos

$$I = \int \frac{A + By}{Cy + Dy^2} dy$$

com

$$A = 1 + \sigma^2$$

$$B = -16\alpha(1 - \sigma^2)(1 + 3\sigma^2)$$

$$C = 1 + \sigma^2$$

$$D = -16\alpha(1 - \sigma^4)$$

Esta integral pode ser feita de imediato, dando

$$I = \frac{B}{2D} \log(Dy^2 + Cy) + \frac{2DA - CB}{2DC} \log \frac{Dy}{Dy + C}$$

Segue então a relação

$$\frac{(1 + 3\sigma^2)}{2(1 + \sigma^2)} \log(-16\alpha(1 - \sigma^4)y^2 + (1 + \sigma^2)y) + \frac{1 - \sigma^2}{2(1 + \sigma^2)} \log\left(\frac{16\alpha(1 - \sigma^4)y}{16\alpha(1 - \sigma^4)y - 1 - \sigma^2}\right) = -4 \log a.$$

.....

Hamiltoniana de Empréstimo

Definindo

$$\rho = \beta Q^{-3(1+\lambda)}$$
$$\Theta = \sigma \frac{P}{Q}.$$

A dinâmica de Friedmann se reduz, nas novas variáveis, à forma:

$$\dot{Q} = -\frac{(1+\lambda)\sigma}{n} P$$
$$\dot{P} = -\frac{(1+3\lambda)}{2} \beta Q^{-(2+3\lambda)}$$

que, como se pode mostrar facilmente consiste em um sistema Hamiltoniano, cuja expressão é dada por:

$$H = \frac{\sigma}{6} P^2 + \frac{\beta}{2} Q^{-(1+3\lambda)}.$$

17 FLUIDOS ESPECIAIS

.....

GD – 1

Nesse capítulo trataremos de alguns fluidos especiais: perfeito, stokesiano, não-stokesiano, viscoso, de Dirac, de Heisenberg, de Born-Infeld, de Chaplygin.

.....

Considere um fluido perfeito descrito por um observador que se movimenta com 4-velocidade v^μ . Seu tensor de energia-momento se reduz à forma

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) v_\mu v_\nu - p g_{\mu\nu}$$

com uma equação de estado dada por $p = \lambda \rho$. Um outro observador de velocidade u^μ descreve essa mesma energia sob a forma

$$T_{\mu\nu} = (\tilde{\rho} + \tilde{p}) u_\mu u_\nu - \tilde{p} g_{\mu\nu},$$

onde $\tilde{p} = \tilde{\lambda} \tilde{\rho}$.

- Qual a relação entre $\tilde{\lambda}$ e λ ?

- Existe uma única equação de estado que é invariante pela troca arbitrária de observadores. Qual a forma de λ desse caso especial?

Fluido de Dirac

GD – 2

P.A.M.Dirac [69] em 1951 sugeriu uma gauge para o eletromagnetismo impondo que o potencial W_μ possa ser identificado com um vetor do tipo tempo de módulo constante:

$$W_\mu W^\mu = 1.$$

Desse modo, é possível utilizar o próprio potencial W_μ como uma congruência v^μ de observadores privilegiados e decompor o campo $F_{\mu\nu} = \partial_\nu W_\mu - \partial_\mu W_\nu$ em suas partes elétrica e magnética na base desse campo de velocidade $v^\mu \equiv W^\mu$ como fizemos atrás. A partir das definições das partes elétrica e magnética, isto é,

$$E_\mu = F_{\mu\nu} v^\nu$$

$$H_\mu = F_{\mu\nu}^* v^\nu$$

mostre que na representação de Dirac tem-se:

- O campo elétrico se identifica com a aceleração a_μ do fluido;
- O campo magnético se identifica com a vorticidade ω_μ .

GD - 3

A representação do fluido de Dirac provoca a não-linearidade das equações de campo. Mostre que na teoria de Maxwell o campo elétrico satisfaz a equação

$$E^\mu{}_{;\mu} = E^2 - H^2$$

onde $E^2 = -E_\mu E^\mu$ e $H^2 = -H_\mu H^\mu$.

Mostre que para o fluido de Dirac a equação da vorticidade (cf capítulo primeiro)

$$\omega^\alpha{}_{;\alpha} + 2\omega^\alpha a_\alpha = 0$$

onde a_α é a aceleração do fluido, coincide com a equação do campo magnético H^α .

GD - 4

Mostre que o potencial dado por

$$W_\mu = (\Phi(r) + n, \sqrt{Z}, 0, 0)$$

onde Z depende de Φ , corresponde ao campo de Coulomb na gauge de Dirac. Qual a expressão de Z ?

GD – 5

Calcule o tensor de energia-momento do campo de Coulomb referido à congruência de curvas do observador $v^\mu = W^\mu$ na gauge de Dirac.

GD – 6

Comentário

Em geral fluidos com viscosidade são entendidos como equações reológicas relacionando a pressão anisotrópica ao shear σ_j^i através de um coeficiente de viscosidade sob a forma linear:

$$\Pi_j^i = \xi \sigma_j^i$$

Usaremos índices latinos para (1, 2, 3) e letras gregas para (0, 1, 2, 3). Essa expressão pode ser generalizada pela condição mais ampla na qual a anisotropia da matéria é um funcional da matriz de deformação Θ_k^i onde

$$\Theta_k^i = \sigma_k^i + \frac{1}{3} \Theta \delta_j^i$$

Ou seja, escrevemos a condição

$$\Pi_j^i = F_j^i(\theta_j^k)$$

Mostre que, usando teorema de Cayley sobre matrizes simétricas podemos escrever

$$\Pi_j^i = A \delta_j^i + B \theta_j^i + C \theta_k^i \theta_j^k$$

onde A , B e C são polinômios dos invariantes principais de θ_j^i .

De modo semelhante define-se fluidos não stokesianos aqueles que se escrevem em termos da aceleração ou da rotação do fluido através das formas

$$\Omega_j^i = \omega^i \omega_j - \frac{\omega^2}{3} \delta_j^i$$

$$A_j^i = a^i a_j - \frac{a^2}{3} \delta_j^i$$

onde $a^2 = a^i a_i$ e $\omega^2 = \omega^i \omega_i$.

Fluido stokesiano quadrático

Considere a geometria gerada por neutrinos (cf capítulo anterior) cuja métrica tem a forma

$$ds^2 = dt^2 - 2e^{Mt} dx dt - e^{2Jt} (dy^2 - dz^2)$$

onde M e J são parâmetros arbitrários satisfazendo uma única condição $J(J - M) < 0$.

Mostre que essa geometria pode alternativamente ser entendida como gerada por uma fonte identificada a um fluido não stokesiano [70] de velocidade $v^\mu = \delta_0^\mu$ no qual o fluxo de calor é proporcional à aceleração e a pressão anisotrópica é quadrática no tensor de dilatação $\Theta_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu} + 1/3 \Theta h_{\mu\nu}$.

Fluido não stokesiano

Bertotti (e independentemente Robinson) exibiram um modelo de solução das equações da relatividade geral gerada por um campo eletromagnético estático, cuja geometria tem a forma

$$ds^2 = (Qr)^{-2}[dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2]$$

onde Q é uma constante.

Considere o campo de velocidades dado por $V_\mu = \delta_\mu^0$. Mostre que as equações da relatividade geral são satisfeitas se ao invés do campo eletromagnético associarmos a fonte da curvatura a um fluido não stokesiano do tipo acelerado, isto é, onde a pressão anisotrópica tem a forma $\pi_j^i \sim A_j^i$ [71].

.....

Exercício: Mostre que o modelo cosmológico com rotação local descrito pela métrica

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - dz^2 + g(r)d\phi^2 + 2h(r)d\phi dz$$

com

$$g(r) = \left[\frac{\gamma^2 + 2}{\gamma^2 - 2} \right] \cos^2 mr - 1$$

$$h(r) = - \frac{2}{\sqrt{\gamma^2 - 2}} \cos mr$$

(com γ e m constantes), tem como fonte um fluido não-Stokesiano cuja pressão anisotrópica π_{ij} é do tipo-rotação:

$$\pi_{ij} = -\gamma^2 \Omega_{ij}$$

Mostre em seguida que tal fluido pode ser interpretado como um campo eletromagnético mais uma densidade incoerente de matéria neutra [71].

.....

Análise qualitativa de métricas cosmológicas

Consideraremos nesse exercício métricas da forma

$$ds^2 = dt^2 - A^2(t) d\sigma^2$$

que satisfazem as equações da relatividade geral tendo como fonte matéria com densidade de energia ρ e pressão p mais termos de viscosidade de tal modo que podemos escrever

$$\tilde{p} = p - \sum \alpha_k \theta^k.$$

As equações de conservação e de expansão se escrevem

$$\dot{\rho} = L(\theta, \rho)$$

$$\dot{\theta} = P(\theta, \rho).$$

Considere o caso quadrático onde temos

$$\tilde{p} = p - \alpha \theta - \beta \theta^2$$

e obtenha

$$P(\theta, \rho) = -\frac{1}{2}\rho - \frac{3}{2}p - \frac{1}{3}\theta^2 + \frac{3}{2}\alpha\theta + \frac{3}{2}\beta\theta^2$$

$$L(\theta, \rho) = -(\rho + p)\theta + \alpha\theta^2 + \beta\theta^3$$

Os pontos singulares desse sistema planar autônomo são

- Origem $O(0, 0)$;
- $B(\theta_0, \rho_0)$.

onde usamos $p = (\gamma - 1)\rho$.

Estude o comportamento das soluções integrais desse sistema [72] para o caso em que α e β são constantes. Examine como se altera o comportamento desses universos quando α for uma potência da densidade de energia ρ . Compare com [73].

Bifurcação: um processo que pode ocorrer em sistemas dinâmicos

Consideremos um sistema dinâmico planar autônomo de variáveis (x, y) e que depende de um parâmetro μ dado por

$$\dot{x} = f(x, y, \mu)$$

$$\dot{y} = h(x, y, \mu)$$

A análise do conjunto de curvas integrais desse sistema é dada a partir de seus pontos singulares, aqueles que anulam simultaneamente f e h . A vizinhança desses pontos possui uma estrutura topológica característica do comportamento das integrais naquela vizinhança do plano (x, y) . A mudança das propriedades topológicas do sistema quando o parâmetro $\mu \rightarrow \mu_0$, na vizinhança de um ponto singular instável representa uma alteração abrupta no comportamento do sistema físico na vizinhança daquele ponto [72] [74]. Uma consequência crucial dessa alteração se reflete na presença de propriedades indeterministas nas propriedades do universo, no caso acima examinado. Em outras palavras, processos dissipativos gerados por termos viscosos quadráticos são responsáveis pelo aparecimento de um alto grau de indeterminação no universo, segundo este modelo cosmológico. Em [75] Prigogine e Stenger fazem uma análise bastante interessante sobre as consequências desse processo de bifurcação na ciência em geral. Veja o exercício seguinte.

$$FNP - \mathfrak{A}_1$$

Considere um fluido com densidade de energia ρ e pressão p gerando, via equações da relatividade geral a métrica homogênea e isotrópica

$$ds^2 = dt^2 - R(t)^2 (d\chi^2 + \sigma^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2))$$

onde a pressão é dada em termos do fator de expansão $\theta = 3\dot{R}/R$ da forma

$$p = p_0 - \alpha \theta - \beta \theta^2$$

onde α e β são constantes.

A lei de conservação de energia e da evolução da expansão se escrevem sob a forma de um sistema planar autônomo [73]:

$$\dot{\theta} = P(\theta, \rho)$$

$$\dot{\rho} = L(\theta, \rho)$$

com

$$P(\theta, \rho) = -\frac{1}{2}\rho - \frac{3}{2}\rho_0 - \frac{1}{3}\theta^2 + \frac{3}{2}\alpha\theta + \frac{3}{2}\beta\theta^2$$

$$L(\theta, \rho) = -(\rho + \rho_0)\theta + \alpha\theta^2 + \beta\theta^3$$

Os pontos singulares desse sistema (que anulam essas duas funções L e P) são a origem $(0, 0)$ e B dado por

$$B(\theta_0, \rho_0) = \left(-\frac{3\alpha}{(3\beta - \gamma)}, \frac{\theta_0^2}{3} \right)$$

onde pusemos

$$\rho_0 = (\gamma - 1)\rho,$$

com γ entre 1 e 2. Calcule as propriedades do sistema dinâmico nas vizinhanças do ponto B para diferentes valores de γ .

Mostre que

- Para $\gamma - 3\beta < 0$ o índice de Poincaré $I_p(B)$ é igual a -1 (saddle);
- Para $\gamma - 3\beta > 0$ o índice de Poincaré $I_p(B)$ é igual 1 (two-tangent node).

Conclusão: O valor $(3\beta - \gamma)$ ao se aproximar de zero caracteriza uma bifurcação na origem onde $(\sigma = \theta = \infty)$.

SOLUÇÕES

.....

GD – 1

Solução

Trata-se de um fluido onde $\lambda = -1$, ou seja, o vazio identificado com uma constante cosmológica.

.....

GD – 3

A equação de Maxwell se escreve

$$H_{;\alpha}^{\alpha} + H^{\alpha} a_{\alpha} - 2\omega^{\alpha} E_{\alpha} = 0$$

para um fluido arbitrário com velocidade v^{μ} , vorticidade ω^{α} e aceleração a^{α} . Substituindo o campo de velocidade pelo potencial do campo eletromagnético na gauge de Dirac essa equação se transforma em

$$\omega_{;\alpha}^{\alpha} + 2\omega^{\alpha} a_{\alpha} = 0$$

que é precisamente a equação da vorticidade (cf capítulo primeiro).

.....

GD - 4

O campo de Coulomb se escreve

$$W_\mu = (\Phi(r), 0, 0, 0).$$

Somando um gradiente $\partial_\mu \Lambda$ de tal modo a não afetar o campo, pela escolha

$$\Lambda = n t + f(r).$$

Temos

$$W_\mu = (\Phi(r) + n, \sqrt{Z}, 0, 0).$$

Escolhendo convenientemente $f(r)$ posso escrever

$$W_\mu W^\mu = 1.$$

Basta fazer

$$Z = (\Phi + n)^2 - 1.$$

.....

GD - 5

A solução de Coulomb dá

$$\Phi = \frac{e}{r}$$

Para o tensor de energia do fluido de Dirac

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) W_\mu W_\nu - p g_{\mu\nu} + q_\mu W_\nu + q_\nu W_\mu + \Pi_{\mu\nu}$$

onde usamos a decomposição para um observador comovente com o potencial A_μ na gauge de Dirac, obtemos

$$\rho = \frac{Z}{2(Z+1)} \Theta^2$$

$$p = \frac{1}{3} \rho$$

$$q_\mu = 0$$

$$\Pi_{\mu\nu} = \frac{2\rho}{\Theta} \sigma_{\mu\nu}.$$

Usando

$$W_\mu = \left(\Phi + n, \sqrt{(\Phi + n)^2 - 1}, 0, 0 \right)$$

obtemos as quantidades cinemáticas. A expansão é dada por

$$\Theta = -\frac{d\Phi}{dr} \sqrt{\frac{Z+1}{Z}};$$

a aceleração vale

$$a_\mu = \left(\frac{Z}{\sqrt{Z+1}} \Theta, \sqrt{Z} \Theta, 0, 0 \right).$$

As componentes não-nulas do shear são:

$$\sigma^0_0 = -\frac{2}{3} Z \Theta$$

$$\sigma^0_1 = -\frac{2}{3} \sqrt{Z(Z+1)} \Theta$$

$$\sigma^1_0 = \frac{2}{3} \sqrt{Z(Z+1)} \Theta$$

$$\sigma^1_1 = \frac{2}{3} (Z+1) \Theta$$

$$\sigma^2_2 = -\frac{1}{3}\Theta$$

$$\sigma^3_3 = -\frac{1}{3}\Theta$$

18 FLUIDO DE HEISENBERG

Compêndio de formulas dos spinores e da álgebra de Clifford.

Seja Ψ um spinor de Dirac com quatro componentes. Construímos correntes vetorial e axial como

$$J^\mu \equiv \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi,$$

$$I^\mu \equiv \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma_5 \Psi.$$

Definimos $\bar{\Psi} \equiv \Psi^+ \gamma^0$, onde Ψ^+ é o complexo conjugado de Ψ . As matrizes de Dirac γ_μ obedecem a condição básica da álgebra de Clifford dada por

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\eta_{\mu\nu} \mathbf{1}$$

onde $\mathbf{1}$ é a identidade da álgebra de Clifford. Quando necessário usaremos a representação

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix},$$

onde I_2 representa a matriz identidade 2×2 e σ_k são as matrizes de Pauli, satisfazendo $\sigma_i \sigma_j = i \epsilon_{ijk} \sigma_k + \delta_{ij}$. Pomos

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A matriz γ_5 anti-comuta com todas as γ_μ e tem-se

$$\gamma_5 = \frac{i}{4!} \eta^{\alpha\beta\mu\nu} \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\nu = i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3,$$

onde a segunda igualdade é válida em um sistema de coordenadas cartesiano na geometria de Minkowski. A matriz γ_5 é hermitiana e as outras γ_μ obedecem as relações auto-adjunta

$$\gamma_\mu^+ = \gamma^0 \gamma_\mu \gamma^0.$$

Definimos as partes direita e esquerda pelas relações

$$\Psi_L = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \gamma_5)\Psi$$

$$\Psi_R = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \gamma_5)\Psi.$$

.....

TFH - 1

Mostre que qualquer spinor pode ser escrito em termos de suas partes direita e esquerda da forma

$$\Psi = \Psi_L + \Psi_R$$

e que valem as propriedades

$$\bar{\Psi}_L \Psi_L = 0$$

$$\bar{\Psi}_R \Psi_R = 0.$$

TFH – 2

Identidades de Pauli-Kofink

As propriedades que precisamos para analisar spinores estão contidas na relação de Pauli-Kofink (PK), que são identidades na álgebra de Clifford. A principal estabelece que para qualquer elemento Q dessa álgebra, valem as identidades:

$$(\bar{\Psi} Q \gamma_\lambda \Psi) \gamma^\lambda \Psi = (\bar{\Psi} Q \Psi) \Psi - (\bar{\Psi} Q \gamma_5 \Psi) \gamma_5 \Psi. \quad (18.1)$$

para Q igual a 1 , γ^μ , γ_5 , $\gamma^\mu \gamma_5$ e $\sigma^{\mu\nu} \equiv (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu)/2$. Mostre, usando as relações de Pauli-Kofink que valem as afirmações:

- A norma das correntes J_μ e I_μ têm o mesmo valor e sinais opostos;
- Os vetores J_μ e I_μ são ortogonais.

Segue então que J_μ é vetor do tipo tempo e I_μ do tipo espaço.

TFH – 3

Considere a equação de Dirac

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - \mu \Psi = 0,$$

onde μ é a massa (nas unidades onde $\hbar = c = 1$.) A lagrangiana é dada por

$$L = L_D - \mu \bar{\Psi} \Psi = \left(\frac{i}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - \frac{i}{2} \partial_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \right) - \mu \bar{\Psi} \Psi.$$

Mostre que decompondo Ψ nas partes direita e esquerda, obtemos interação entre os dois termos Ψ_R e Ψ_L devido à massa.

TFH – 4

A dinâmica de Heisenberg é dada pela lagrangiana [76] [77] [78]:

$$L = L_D - V(\Psi)$$

onde o potencial V deve ser construído com os escalares A e B . A escolha de Heisenberg foi

$$V = s (A^2 + B^2),$$

onde s é um parâmetro real de dimensão comprimento ao quadrado, $[L]^2$. Escreva a equação de movimento para o campo Ψ e seu adjunto. Mostre que pode-se escrever o potencial sob a forma corrente-corrente

$$V = J^\mu J_\mu.$$

TFH – 5

"On-mass-shell"(isto é, quando o spinor satisfaz a equação), a lagrangiana de Heisenberg toma o valor $L(\text{oms}) = V_H$. Compare com o que ocorre na equação de Dirac.

TFH – 6

Simetrias

Mostre que a dinâmica de Dirac e de Heisenberg são invariantes sob a transformação

$$\tilde{\Psi} = S \Psi$$

onde S é uma matriz unitária que satisfaz $S^{-1}S_{,\mu} = c_{\mu} I$.

TFH – 7

Simetria Chiral

A transformação chiral é definida pelo mapa

$$\Psi' = \gamma_5 \Psi.$$

Mostre que a equação de Dirac é invariante por esse mapa somente para fermions sem massa e que a equação de Heisenberg é invariante.

TFH – 8

Quais as equações que os spinores de Heisenberg Ψ_L e Ψ_R satisfazem?

TFH – 9

Conservação da corrente

Introduzindo um parâmetro arbitrário ϵ na equação de Heisenberg temos

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - 2s(A + i\epsilon B\gamma_5)\Psi = 0$$

e para $\bar{\Psi}$

$$i\partial_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu + 2s\bar{\Psi}(A + i\epsilon B\gamma_5) = 0$$

Mostre que a corrente J^μ se conserva para qualquer valor de ϵ , mas a corrente axial I^μ se conserva somente com a escolha de Heisenberg $\epsilon = 1$.

TFH – 10

Relação entre Dirac e Heisenberg

Considere os spinores de Dirac (Ψ_D) e de Heisenberg (Ψ_H) satisfazendo, respectivamente as equações

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi^D - \mu \Psi^D = 0$$

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi^H - 2s(A + iB\gamma^5) \Psi^H = 0.$$

onde a constante s tem dimensão de (comprimento)² e

$$A \equiv \bar{\Psi}^H \Psi^H$$

$$B \equiv i\bar{\Psi}^H \gamma^5 \Psi^H.$$

Mostre que todo spinor que satisfaz a condição especial (CE) dada por

$$\partial_\mu \Psi^H = (\alpha J_\mu + \beta I_\mu \gamma^5) \Psi^H$$

onde α e β são constantes complexas de dimensão L^2 (comprimento ao quadrado) e a corrente J_μ e a corrente axial I_μ são definidas como usual, isto é,

$$J^\mu \equiv \bar{\Psi}^H \gamma^\mu \Psi^H$$

$$I^\mu \equiv \bar{\Psi}^H \gamma^\mu \gamma^5 \Psi^H$$

satisfaz identicamente a equação de Heisenberg. Qual a condição sobre α e β ?

.....

TFH – 11

Compare a solução especial (CE) com a classe de soluções da equação linear de Dirac caracterizada pela propriedade de auto-estado dada por

$$\partial_\mu \Psi = i k_\mu \Psi.$$

Mostre que para que a condição CE seja integrável é suficiente que as constantes a e b satisfaçam um unico vinculo dado por $Re(a) - Re(b) = 0$.

.....

TFH – 12

Mostre que o spinor Ψ^D definido em termos do spinor de Heisenberg pela relação

$$\Psi^D = \mathbb{X} \Psi_L^H + \mathbb{Z} \Psi_R^H$$

e onde vale a condição especial (CE), satisfaz identicamente a equação de Dirac. Ou seja podemos escrever para os spinores direito e esquerdo as relações

$$\psi_L^D = \mathbb{X} \psi_L^H$$

$$\psi_R^D = \mathbb{Z} \psi_R^H.$$

Calcule \mathbb{X} e \mathbb{Z} . Mostre que a corrente vetorial e a corrente axial podem ser escritos como gradientes.

.....

TFH – 13

Fluido de Heisenberg

Usando a definição do tensor de energia-momentum obtenha a expressão para o campo spinorial de Heisenberg satisfazendo a condição especial CE descrita anteriormente.

.....

TFH – 14

Como J_μ é vetor tipo tempo podemos definir um campo de velocidades $v_\mu = J_\mu / \sqrt{J^2}$ para decompor o tensor de energia sob a forma

$$T_{\mu\nu} = \rho v_\mu v_\nu - p h_{\mu\nu} + q_\mu v_\nu + \pi_{\mu\nu}$$

Calcule a densidade ρ e as demais quantidades (pressão, fluxo de calor e pressão anisotrópica). Mostre que a pressão anisotrópica é proporcional ao shear e que a auto-interação não gera auto-aceleração deste fluido para qualquer valor de s (e de α e de β .) Note que no caso particular em que $Im(\beta) + 3Im(\alpha) = 0$ tem-se um vácuo anisotrópico onde

$$\rho + p = 0$$

$$\pi_{\mu\nu} = \chi \sigma_{\mu\nu}.$$

.....

TFH – 15

Considere o caso particular onde o fluido de Heisenberg se identifica com um fluido perfeito ultrarelativista (isto é, $p = \rho$.) Mostre que ele pode ser fonte de um universo do tipo Friedman [79].

.....

SOLUÇÕES

.....

TFH – 2

Use a fórmula de Pauli-Kofink para obter as identidades intermediárias necessárias para resolver o problema:

$$J_\mu \gamma^\mu \Psi \equiv (A + iB\gamma_5) \Psi,$$

$$I_\mu \gamma^\mu \gamma_5 \Psi \equiv -(A + iB\gamma_5) \Psi,$$

$$I_\mu \gamma^\mu \Psi \equiv (A + iB\gamma_5) \gamma_5 \Psi,$$

$$J_\mu \gamma^\mu \gamma_5 \Psi \equiv -(A + iB\gamma_5) \gamma_5 \Psi,$$

onde $A \equiv \bar{\Psi} \Psi$ e $B \equiv i\bar{\Psi} \gamma_5 \Psi$. Note que ambas quantidades A e B são reais.

.....

TFH – 3

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi_L - \mu \Psi_R = 0,$$

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi_R - \mu \Psi_L = 0.$$

TFH - 4

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi^H - 2s(A + iB\gamma_5) \Psi^H = 0.$$

Correspondentemente para o adjunto

$$i\partial_\mu \bar{\Psi}^H \gamma^\mu + 2s\bar{\Psi}^H (A + iB\gamma_5) = 0$$

TFH - 7

Temos para o spinor conjugado:

$$\bar{\Psi}' = -\bar{\Psi}\gamma_5,$$

que implica

$$A' = -A,$$

$$B' = -B$$

consequentemente a lagrangiana de Heisenberg não se altera.

.....

$$TFH - 8$$

Temos

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi_L - 2s(A - iB\gamma_5) \Psi_R = 0$$

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi_R - 2s(A + iB\gamma_5) \Psi_L = 0$$

.....

$$TFH - 9$$

Com efeito, temos

$$i\bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma_5 \partial_\mu \Psi = 2s i(1 - \epsilon)AB.$$

e também

$$i\partial_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma_5 \Psi = 2s i(1 - \epsilon)AB.$$

Segue então

$$\partial_\mu I^\mu = 4s(1 - \epsilon)AB.$$

.....

TFH – 10

Devemos ter

$$2s = i(\alpha - \beta).$$

Use as identidades

$$J_\mu \gamma^\mu \Psi = A\Psi + iB\gamma^5\Psi$$

$$I_\mu \gamma^\mu \Psi = A\gamma^5\Psi + iB\Psi.$$

.....

TFH – 11

Com efeito, temos

$$\partial_\mu J_\nu = (a + \bar{a})J_\mu J_\nu + (b + \bar{b})I_\mu I_\nu$$

$$\partial_\mu A = (a + \bar{a})AJ_\mu + (b - \bar{b})iBI_\mu.$$

$$\partial_\mu B = (a + \bar{a}) B J_\mu + (b - \bar{b}) i A I_\mu.$$

$$\partial_\mu I_\nu = (a + \bar{a}) J_\mu I_\nu + (b + \bar{b}) J_\nu I_\mu.$$

Segue então

$$[\partial_\mu, \partial_\nu] \Psi = \left(a \partial_{[\mu} J_{\nu]} + b \partial_{[\mu} I_{\nu]} \gamma^5 \right) \Psi.$$

Mas

$$\partial_\mu J_\nu - \partial_\nu J_\mu = (a + \bar{a}) [J_\mu, J_\nu] + (b + \bar{b}) [I_\mu, I_\nu],$$

and

$$\partial_\mu I_\nu - \partial_\nu I_\mu = (a + \bar{a} - b - \bar{b}) [J_\mu I_\nu - I_\mu J_\nu].$$

Dai a condição de integrabilidade requer

$$Re(a) = Re(b).$$

Verifique que para qualquer combinação dos spinores essa condição é suficiente.

$$TFH - 12$$

Temos

$$J_\mu = \partial_\mu \Theta,$$

$$I_\mu = \partial_\mu \Gamma,$$

onde

$$\Theta = \frac{1}{2(a + \bar{a})} \ln(A^2 + B^2),$$

$$\Gamma = \frac{1}{b - \bar{b}} \ln \frac{A - iB}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

E, para as quantidades \mathbb{X}, \mathbb{Z} encontramos:

$$\mathbb{X} = \exp\left(\frac{iM}{(a + \bar{a})J}\right) J^{2\sigma} \sqrt{J/(A - iB)}$$

$$\mathbb{Z} = \exp\left(\frac{iM}{(a + \bar{a})J}\right) J^{2\sigma} \sqrt{(A - iB)/J}$$

onde M é a massa do fermion.

.....

TFH - 13

$$T_{\mu\nu} = -l J_\mu J_\nu - n I_\mu I_\nu - s J^2 g_{\mu\nu}.$$

onde l é a parte imaginária de α e n a parte imaginária β e $s = (l - n)/2$ definidos na condição especial

$$\partial_\mu \Psi^H = (\alpha J_\mu + \beta I_\mu \gamma^5) \Psi^H$$

Note que J_μ e I_μ são auto-vetores desse tensor.

 $TFH - 14$

$$\rho = -\frac{(l+n)}{2} J^2$$

$$p = \frac{(3l-n)}{3(l+n)} \rho$$

$$q_\mu = 0$$

$$\pi_{\mu\nu} = -\frac{n}{3} (J_\mu J_\nu - 3I_\mu I_\nu - J^2 g_{\mu\nu})$$

19 PONTE DINÂMICA: ELETRODINÂMICA DOS CORPOS SEM CARGA

Comentário

Nessa seção iremos tratar de um resultado bastante intrigante. O leitor irá mostrar, através dos exercícios que seguem o seguinte lema:

A descrição de qualquer teoria do campo eletromagnético feita em uma geometria dotada de uma dada métrica, estabelecida a priori, pode ser descrita de modo dinâmico equivalente em uma outra geometria dotada de métrica construída com funções do próprio campo. [80]

Nós iremos nos restringir aqui ao caso eletromagnético, embora o leitor possa seguir adiante e considerar outras teorias de gauge, generalizando esse lema.

PD – 1

Defina o tensor simétrico $\Phi_{\mu\nu}$ com produtos do campo de Maxwell

$$F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$$

pela relação

$$\Phi_{\mu\nu} = F_\mu^\alpha F_{\alpha\nu}$$

onde a métrica do background é dada pelo tensor de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$. A partir dessa quantidade, defina uma métrica

$$e^{\mu\nu} = a \eta^{\mu\nu} + b \Phi^{\mu\nu}.$$

Calcule a inversa definida como

$$e^{\alpha\nu} e_{\nu\beta} = \delta_\beta^\alpha$$

e escreva a forma de seu determinante.

PD – 2

Mostre as identidades

$$\Phi_\mu^\alpha \Phi_{\alpha\nu} = \frac{1}{16} G^2 \eta_{\mu\nu} - \frac{1}{2} F \Phi_{\mu\nu}.$$

PD - 3

Considere as duas métricas $\eta_{\mu\nu}$ e $e_{\mu\nu}$. As quantidades com "chapéu" se comportam como tensores na geometria \hat{e} com métrica $e_{\mu\nu}$.

Temos então

$$\hat{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$$

$$\hat{F}^{\mu\nu} = a^2 (\Sigma F^{\mu\nu} + \Pi *F^{\mu\nu}).$$

$$*\hat{F}^{\mu\nu} = a^2 (\Pi F^{\mu\nu} + \Upsilon *F^{\mu\nu}).$$

Calcule Σ , Π e Υ .

PD - 4

Defina os invariantes construídos com tensores usando a métrica $e^{\mu\nu}$ com um símbolo "chapéu", como por exemplo

$$\hat{F} = F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} e^{\mu\alpha} e^{\nu\beta}.$$

Calcule a expressão de \hat{F} e de \hat{G} em termos dos invariantes na métrica de Minkowski (F, G) .

PD – 5

A expressão da ponte dinâmica

Considere uma teoria dada pela lagrangiana $L(F, G)$ em uma geometria de Minkowski de métrica $\eta_{\mu\nu}$ cuja dinâmica tem a forma

$$\partial_\nu \left(\sqrt{-\eta} [L_F F^{\mu\nu} + L_G {}^*F^{\mu\nu}] \right) = 0.$$

Considere uma outra teoria determinada pela lagrangiana $\hat{L}(\hat{F}, \hat{G})$ em uma geometria gerada a partir do campo $F_{\mu\nu}$ como vimos acima, dada por

$$e^{\mu\nu} = a \eta^{\mu\nu} + b \Phi^{\mu\nu}$$

cuja dinâmica tem a forma

$$\partial_\nu \left(\sqrt{-e} [\hat{L}_{\hat{F}} \hat{F}^{\mu\nu} + \hat{L}_{\hat{G}} {}^*\hat{F}^{\mu\nu}] \right) = 0.$$

Questão: sob quais condições essas duas teorias podem ser identificadas? (de tal modo que toda solução de uma também é da outra). Faça o exemplo da teoria linear de Maxwell na métrica de Minkowski sendo dinamicamente equivalente à teoria de Born-Infeld na métrica $e_{\mu\nu}$ acima definida.

PD – 6

Calcule a relação entre as matrizes $\hat{\gamma}^\mu$ geradoras da métrica $e^{\mu\nu}$ e as γ^μ geradoras da métrica $\eta^{\mu\nu}$. Calcule em seguida as inversas $\hat{\gamma}_\mu$ definidas como $\hat{\gamma}_\mu = e_{\mu\nu} \hat{\gamma}^\nu$.

PD - 7

Uma partícula carregada, representada por um campo spinorial que satisfaz, livre, a equação de Dirac

$$i \gamma^\mu \nabla_\mu \Psi - m \Psi = 0$$

(onde fizemos $\hbar = c = 1$)) interage com um campo eletromagnético via conservação de gauge, pela substituição

$$\nabla_\mu \rightarrow \nabla_\mu - i \frac{e}{\hbar} A_\mu.$$

A existência do momento magnético do elétron (magneton de Bohr) caracterizado por

$$\mu_B = \frac{e \hbar}{2 m_e}$$

faz aparecer uma interação da forma de acoplamento não-minimo dada por

$$L_{int} = \mu_B \bar{\Psi} \Sigma^{\alpha\beta} \Psi F_{\mu\nu}.$$

Esses dois modos descrevem os processos de interação convencional mínima e não-mínima de um fermion com o campo eletromagnético. Do que vimos acima, a ponte dinâmica permite considerar essa interação de modo semelhante, no espaço curvo da métrica eletromagnética $e_{\mu\nu}$. Isso sugere uma nova forma de interação entre um fermion e o campo eletromagnético através da métrica $e^{\mu\nu}$

como semelhante ao acoplamento mínimo da forma imitada da interação gravitacional, a saber:

$$i \hat{\gamma}^\mu \hat{\nabla}_\mu \Psi - m \Psi = 0.$$

onde a derivada covariante tem a forma

$$\hat{\nabla}_\mu \Psi = \partial_\mu \Psi - \hat{\Gamma}_\mu \Psi$$

e a conexão interna de Fock-Ivanenko é

$$\hat{\Gamma}_\mu = -\frac{1}{8} \left(\hat{\gamma}^\lambda \hat{\gamma}_{\lambda,\mu} - \hat{\gamma}_{\lambda,\mu} \hat{\gamma}^\lambda - \hat{\Gamma}^e_{\mu\alpha} (\hat{\gamma}^\alpha \hat{\gamma}_e - \hat{\gamma}_e \hat{\gamma}^\alpha) \right)$$

Mostre que essa interação pode ser interpretada na métrica de Minkowski como gerando dois tipos de acoplamento não-mínimo dados por

$$L_1 = F^\mu{}_\varepsilon \bar{\Psi} \gamma^\varepsilon \partial_\mu \Psi,$$

$$L_2 = C_{\alpha\beta\varepsilon} \bar{\Psi} \gamma^\varepsilon \Sigma^{\alpha\beta} \partial_\mu \Psi,$$

onde $\Sigma^{\alpha\beta} = [\gamma^\alpha, \gamma^\beta]$. **Explicita** $C_{\alpha\beta\varepsilon}$ em termos do campo $F_{\mu\nu}$.

Use a identidade

$$\gamma_\mu \Sigma_{\rho\nu} = 2 \eta_{\mu\rho} \gamma_\nu - 2 \eta_{\mu\nu} \gamma_\rho + 2 i \varepsilon_{\mu\rho\nu\sigma} \gamma^5 \gamma^\sigma$$

para re-escrever a interação do fermion sob a forma

$$i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi + \frac{i}{\beta} F^{\mu\nu} \gamma_\mu \partial_\nu \Psi + i C_\mu \gamma^\mu \Psi - D_\mu \gamma^5 \gamma^\mu \Psi - m \Psi = 0.$$

Calcule C_μ e D_μ .

Comentário A teoria não-linear de Born-Infeld introduziu uma constante β com dimensão dada por

$$[\beta] = M^{1/2} L^{-3/2},$$

ou seja, ela tem a mesma dimensão que $m c^2 \mu_B^{-1}$. Isso significa que a interação de um fermion com o campo eletromagnético pode ser feita através de uma lagrangiana sem necessidade de usar a constante carga elétrica e . O neutrino, que não possui carga elétrica, possui momento magnético. Corpos neutros, sem carga elétrica, como o neutron, podem exibir momento magnético anômalo, embora nesse caso, esta propriedade pode ser associada ao fato de que, por exemplo, o neutron é uma partícula composta de quarks e que, estes, possuem carga. Uma tal explicação não se aplica ao caso do neutrino. A interpretação da ponte dinâmica permite entender a presença do momento magnético para partículas como os neutrinos. Isso significa que, usando a ponte dinâmica é possível produzir uma teoria eletrodinâmica de corpos sem carga.

Soluções

$$PD - 1$$

Tem-se

$$e_{\mu\nu} = A \eta_{\mu\nu} + B \Phi_{\mu\nu},$$

onde

$$A = \frac{(1 - \varepsilon F/2)}{aQ}$$

$$B = -\frac{\varepsilon}{aQ}$$

e as quantidades Q e ε são dadas por

$$Q = 1 - \frac{1}{2} \varepsilon F - \frac{1}{16} \varepsilon^2 G^2$$

$$\varepsilon = \frac{b}{a}.$$

O determinante \hat{e} é dado por

$$\sqrt{\hat{e}} = \sqrt{-\eta} A^2 U.$$

onde

$$U = 1 - \frac{F}{2} \frac{B}{A} - \frac{G^2}{16} \left(\frac{B}{A} \right)^2.$$

Mostra-se que

$$A^2 U = \frac{1}{a^2 Q}.$$

Segue então

$$\sqrt{\hat{e}} = \frac{\sqrt{-\eta}}{a^2 Q}.$$

PD - 2

Usando as definições

$$F \equiv F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

$$G \equiv F_{\mu\nu}^* F^{\mu\nu}.$$

a demonstração é imediata graças às identidades algébricas:

$$*F^{\mu\alpha} *F_{\alpha\nu} - F^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu} = \frac{1}{2} F \delta^{\mu}_{\nu},$$

$$F^{\mu\alpha} *F_{\alpha\nu} = -\frac{1}{4} G \delta^{\mu}_{\nu},$$

$$F^{\mu}_{\alpha} F^{\alpha}_{\beta} F^{\beta}_{\nu} = -\frac{G}{4} *F^{\mu}_{\nu} - \frac{F}{2} F^{\mu}_{\nu},$$

$$F^{\mu}_{\alpha} F^{\alpha}_{\beta} F^{\beta}_{\lambda} F^{\lambda}_{\nu} = \frac{G^2}{16} \delta^{\mu}_{\nu} - \frac{F}{2} F^{\mu}_{\alpha} F^{\alpha}_{\nu}.$$

PD - 3

$$\Sigma = 1 - \varepsilon F + \frac{\varepsilon^2}{4} (F^2 + \frac{1}{4} G^2)$$

$$\Pi = \frac{\varepsilon}{2} (\frac{1}{4} \varepsilon F - 1) G.$$

$$\Upsilon = \frac{1}{16} (1 + \varepsilon^2 G^2).$$

PD - 4

Usando as construções

$$\hat{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$$

$$\hat{F}_{\mu\nu}^* = \frac{1}{Q} (\Sigma F_{\mu\nu}^* - \Pi F_{\mu\nu})$$

$$\hat{F}^{\mu\nu} = a^2 (\Sigma F^{\mu\nu} + \Pi^* F^{\mu\nu})$$

$$*\hat{F}^{\mu\nu} = a^2 Q^* F^{\mu\nu}$$

Obtemos para os invariantes calculados nas duas métricas as formas:

$$\hat{F} = a^2 (\Sigma F + \Pi G),$$

e, para o outro invariante:

$$\hat{G} = a^2 Q G.$$

.....

PD - 5

A teoria de Maxwell tem a forma

$$L_M = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

e a teoria de Born-Infeld é dada por

$$\hat{L}_B = \beta^2 \left(1 - \sqrt{\hat{U}} \right)$$

onde

$$\hat{U} \equiv 1 + \frac{\hat{F}}{2\beta^2} - \frac{\hat{G}^2}{16\beta^4}$$

Identificando os coeficientes dos termos $F_{\mu\nu}$ e $F_{\mu\nu}^*$ encontramos as duas condições:

$$\Sigma = Q \sqrt{\hat{U}}$$

$$a^2 Q^2 G = 4\beta^2 \Pi.$$

Um resultado notável decorre dessas relações: usando o resultado acima da segunda expressão segue que a primeira é satisfeita identicamente. Isso significa que das quantidades a e b da métrica $e_{\mu\nu}$ uma dessas quantidades é arbitrária. Mostre esse resultado.

.....

PD – 6

Tem-se

$$\hat{\gamma}^\mu = \sqrt{a} \gamma^\mu + i \sqrt{b} F^\mu{}_\alpha \gamma^\alpha.$$

20 MECANISMO GRAVITACIONAL DE GERAÇÃO DE MASSA

Comentários introdutórios

Para se obter um mecanismo confiável capaz de gerar massa para todos os corpos três condições devem ser satisfeitas:

- Deve existir um campo universal que interage com todas as espécies de partículas;
- Esse campo deve ser tal que sua interação com a matéria quebra explicitamente alguma simetria exibida por partículas de massa nula, como por exemplo a liberdade de gauge (calibre) para campos vetoriais ou a chiralidade para fermions.
- Deve existir um parâmetro livre sem dimensão, de tal modo que diferentes corpos adquirem valores distintos para suas massas (gerando o espectro de massa);

Existem somente dois candidatos aceitáveis para essa função que preenche a primeira condição:

- O campo gravitacional;
- Um campo escalar específico φ ;

Os físicos de altas energias produziram um mecanismo de geração de massa baseado em um campo escalar ao qual se deu o nome mecanismo de Higgs [81]. No entanto, uma dificuldade de princípio aflige esse mecanismo e que pode

ser sintetizado em uma questão: quem dá massa àquele que dá massa a todas as outras partículas? A proposta do mecanismo de Higgs não apresenta uma solução a essa questão. O mecanismo gravitacional mostra, para essa questão uma superioridade, posto que a interação gravitacional se faz através de um campo que não tem massa.

Os exercícios seguintes estão relacionados ao mecanismo gravitacional.

MGM – 1

Preâmbulo

Uma formulação do princípio de Mach consiste na afirmação de que as propriedades de inércia de um corpo \mathbb{A} são determinadas pela distribuição da energia em todo o espaço, ou seja a ação do resto-do-universo sobre \mathbb{A} . Um modo natural de descrever essa situação consiste em assimilar esse estado à configuração mais homogênea relacionando-o ao que Einstein chamou de constante cosmológica ou, em linguagem moderna ao vácuo de todos os outros corpos. Ou seja, descrever a distribuição de energia complementar ao corpo \mathbb{A} como sendo dada por

$$T_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}$$

Note que todas as configurações do mecanismo de geração de massa de Higgs possuem exatamente essa forma para a distribuição de energia do estado fundamental do campo de Higgs [81].

MGM – 2

Massa para um campo escalar: um caso trivial

Considere a interação do campo escalar sem massa com a gravitação na relatividade geral dada por

$$L = \frac{1}{\kappa_0} R + \frac{1}{2} \partial_\alpha \varphi \partial^\alpha \varphi + B(\varphi) R - \frac{\lambda}{\kappa_0}$$

onde, a expressão de B em termos do campo escalar será fixada mais adiante. Calcule as equações dos campos φ e $g_{\mu\nu}$. Mostre que podemos escrever a dinâmica sob a forma

$$\square \varphi + \mathbb{Z} = 0$$

onde

$$\mathbb{Z} = \frac{B'}{\alpha_0 + 2B} \left(\partial_\alpha \varphi \partial^\alpha \varphi (1 + 6B'') + 6B' \square \varphi - \frac{4\lambda}{\kappa_0} \right)$$

$$\alpha_0 = 2/\kappa$$

MGM – 3

Massa para o campo escalar-II

Vamos agora examinar um caso mais geral. Considere a lagrangiana de um campo escalar acoplado não-minimamente à geometria, dada por

$$L = \frac{1}{\kappa} R + \frac{1}{2} W(\varphi) \partial_\alpha \varphi \partial^\alpha \varphi + B(\varphi) R - \frac{\Lambda}{\kappa}$$

onde a dependência de B e W no escalar será fixada a posteriori. Estamos sempre no sistema de unidades onde $\hbar = c = 1$. Note que a interação de φ com o resto-do-universo (RDU) é dada somente via gravitação pela constante cosmológica Λ . Ou seja, Λ representa a influência de RDU sobre φ . Calcule as equações de movimento dadas por variações de φ e $g_{\mu\nu}$ e o tensor de energia correspondente.

MGM – 4

Usando o traço do tensor $T_{\mu\nu}$ na equação da métrica e substituindo na equação do campo escalar obtém-se sucessivamente (Mostre)

$$(\alpha_0 + 2B) R = -\partial_\alpha \varphi \partial^\alpha \varphi (W + 6B'') - 6B' \square \varphi + 4 \frac{\Lambda}{\kappa}$$

onde usamos $\square B = B' \square \varphi + B'' \partial_\alpha \varphi \partial^\alpha \varphi$. Inserindo na equação do escalar temos uma auto-interação de φ induzida pela gravitação:

$$\mathbb{M} \square \varphi + \mathbb{N} \partial_\alpha \varphi \partial^\alpha \varphi - \mathbb{Q} = 0$$

onde

$$\mathbb{M} \equiv W + \frac{6(B')^2}{\alpha_0 + 2B}$$

$$\mathbb{N} \equiv \frac{1}{2} W' + \frac{B' (W + 6B'')}{\alpha_0 + 2B}$$

$$\mathbb{Q} = \frac{4 \Lambda B'}{\kappa (\alpha_0 + 2B)}$$

Selecione as funções B e W de tal modo que o fator gradiente do campo escalar desapareça da equação pondo $\mathbb{N} = 0$. Como resultado da interação gravitacional o campo escalar adquire uma massa μ que depende da constante β e da existência de Λ . Exiba a expressão dessa massa.

.....

MGM – 5

Mostre que no caso do campo ter uma massa o mecanismo gravitacional renormaliza essa massa μ_0 para o valor

$$\mu^2 = \mu_0^2 + \beta \Lambda.$$

.....

MGM – 6

O caso dos fermions: gravidade quebra simetria chiral

A dinâmica de um campo spinorial sem massa é dada pela equação de Dirac:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi = 0.$$

Essa equação é invariante chiral (isto é, invariante sob transformação de γ^5). Para ter massa o fermion deve quebrar essa invariância. Considere a interação do fermion com a gravitação dada pela lagrangiana

$$\begin{aligned} L = & \hbar c \left(\frac{i}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \Psi - \frac{i}{2} \nabla_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \right) \\ & + \frac{1}{\kappa} R + V(\Phi) R - \frac{1}{\kappa} \Lambda \\ & + L_{CT} \end{aligned}$$

onde

$$\Phi \equiv \bar{\Psi} \Psi$$

e preserva a invariância de gauge sob o mapa

$$\Psi \rightarrow \exp(i\theta) \Psi$$

mas quebra a invariância chiral. O contra-termo L_{CT} deve ser escolhido de tal forma que não apareçam derivadas na métrica de ordem superior (a dois) ou seja, deve ser do tipo

$$L_{CT} = H(\Phi) \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi$$

A dinâmica do campo Ψ é dada por

$$i\gamma^\mu \nabla_\mu \Psi + (\mathbb{X} \partial_\lambda \Phi \partial^\lambda \Phi + \mathbb{Y} \square \Phi) \Psi + \mathbb{Z} \Psi = 0.$$

Questão: qual a forma de \mathbb{X} , \mathbb{Y} , \mathbb{Z} ? Quais devem ser as formas de V e H de tal modo que os termos em gradiente e $\nabla_\mu \nabla^\mu$ do campo Ψ desapareça da sua equação? Obtenha assim a equação do fermion com massa, adquirida pela interação gravitacional. Note que o valor da massa é dado por (mostre)

$$m = \frac{4\sigma\Lambda}{\kappa c^2}.$$

ou seja, ela se anula se a constante cosmológica for zero. Questão: a razão m/σ obtida acima, que tem o significado de uma densidade de massa, é uma constante universal. Como interpretar essa universalidade?

MGM – 7

Massa para campo vetorial

Considere um cenário com três ingredientes: um campo vetorial sem massa, o campo gravitacional onipresente e uma distribuição homogênea de energia que é identificada com o vácuo. A dinâmica, impondo que a interação do campo eletromagnético com a gravitação seja feita pelo acoplamento mínimo, é dada pela lagrangiana

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{\kappa} R - \frac{2\Lambda}{\alpha_0}$$

Calcule as equações de movimento e mostre que, nesse caso, o vácuo Λ é invisível para W_μ .

MGM – 8

Se a gravitação é a responsável por conceder massa ao campo, sua interação deve violar a invariância de gauge. A lagrangiana deve ser da forma

$$\begin{aligned} \mathbb{L} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{\kappa} R \\ & + \frac{\gamma}{6} R \Phi + \gamma R_{\mu\nu} W^\mu W^\nu \\ & - \frac{\Lambda}{\kappa} \end{aligned}$$

onde o parâmetro γ é adimensional e definimos

$$\Phi \equiv W_\mu W^\mu.$$

Exiba as equações de movimento variando independentemente W_μ e $g_{\mu\nu}$. Usando a definição do tensor momento-energia calcule a forma da energia do campo W_μ . Usando o traço da equação da métrica é possível re-escrever a dinâmica do campo vetorial onde a massa do campo é dada por

$$\mu^2 = \frac{2\gamma\Lambda}{3}.$$

Mostre que se tem efetivamente, para o campo vetorial, como resultado da interação com o resto-do-universo, representado pela constante cosmológica, a forma:

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu}{}_{;\nu} + \frac{2\gamma\Lambda}{3} W^\mu \\ - \frac{\kappa\gamma^2}{3} \nabla_\alpha \nabla_\beta (W^\alpha W^\beta) W^\mu \\ + 2\gamma R^\mu{}_\nu W^\nu = 0 \end{aligned}$$

MGM – 9

Comentário introdutório ao caso do campo de spin-2

Existem dois modos equivalentes de descrever um campo de spin-2 [14]:

- Esquema de Einstein
- Esquema de Fierz

O primeiro faz uso de um tensor simétrico de segunda ordem $\varphi_{\mu\nu}$ e o segundo usa um tensor de terceira ordem $F_{\alpha\beta\lambda}$. O tensor $F_{\alpha\beta\mu}$ é anti-simétrico no primeiro par de índices e obedece a identidade cíclica:

$$F_{\alpha\mu\nu} + F_{\mu\alpha\nu} = 0,$$

$$F_{\alpha\mu\nu} + F_{\mu\nu\alpha} + F_{\nu\alpha\mu} = 0.$$

Mostre que assim definido o dual de $F_{\alpha\mu\nu}$ não tem traço

$$\tilde{F}^{\alpha\mu}{}_{\mu} = 0.$$

e possui 20 componentes independentes.

Mostre que a condição necessária e suficiente para que $F_{\alpha\mu\nu}$ represente um só campo de spin-2 (descrito por 10 componentes) é dada por

$$\tilde{F}^{\alpha(\mu\nu)}{}_{,\alpha} = 0.$$

Note que essa condição é analoga ao que ocorre no caso do campo eletromagnético: a condição necessária para que exista um potencial A_{μ} para o campo EM $F_{\mu\nu}$ é dada por

$$\tilde{F}^{\alpha\mu}{}_{,\alpha} = 0.$$

Mostre que vale a identidade

$$F^{\alpha\beta\mu}{}_{,\mu} = 0.$$

Chama-se tensor de Fierz o objeto $F_{\alpha\mu\nu}$ que satisfaz as condições acima. Mostre que se $F_{\alpha\mu\nu}$ é um tensor de Fierz então ele representa um unico campo de spin-2.

Mostre que, no espaço de Minkowski, a conexão entre a representação de Einstein e a de Fierz de tal modo que existe um tensor simétrico de segunda ordem $\varphi_{\mu\nu}$ que atua como um potencial para o campo de Fierz e se pode escrever

$$\begin{aligned} 2F_{\alpha\mu\nu} &= \varphi_{\nu[\alpha,\mu]} + (\varphi_{,\alpha} - \varphi_{\alpha}{}^{\lambda}{}_{,\lambda}) \eta_{\mu\nu} \\ &- (\varphi_{,\mu} - \varphi_{\mu}{}^{\lambda}{}_{,\lambda}) \eta_{\alpha\nu}. \end{aligned}$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é o tensor métrico de Minkowski. O fator 2 foi introduzido por conveniencia.

Mostre que podemos re-escrever essa relação sob a forma mais compacta

$$2F_{\alpha\mu\nu} = \varphi_{\nu[\alpha,\mu]} + F_{[\alpha} \eta_{\mu]\nu}.$$

Mostre a identidade

$$F^{\alpha}{}_{(\mu\nu),\alpha} \equiv -2G^{(L)}{}_{\mu\nu}$$

onde $G^{(L)}{}_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein linearizado, definido a partir da perturbação da métrica

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu}$$

dado por

$$2G^{(L)}_{\mu\nu} \equiv \nabla_\alpha \nabla^\alpha \varphi_{\mu\nu} - \varphi^\epsilon_{(\mu,\nu),\epsilon} + \varphi_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} (\nabla_\alpha \nabla^\alpha \varphi - \varphi^{\alpha\beta}_{,\alpha\beta}).$$

Mostre que a divergencia de $F^\alpha_{(\mu\nu),\alpha}$ implica na identidade de Bianchi:

$$F^{\alpha(\mu\nu)}_{,\alpha\mu} \equiv 0.$$

Dinâmica de $F_{\alpha\mu\nu}$ na geometria de Minkowski

A forma da lagrangiana deve ser construída a partir dos três invariantes

$$A \equiv F_{\alpha\mu\nu} F^{\alpha\mu\nu}$$

$$B \equiv F_\mu F^\mu.$$

$$W \equiv F_{\alpha\beta\lambda} F^{*\alpha\beta\lambda} = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta\lambda} F^{\mu\nu\lambda} \eta^{\alpha\beta}_{\mu\nu}.$$

Mostre que W é um invariante topológico e não contribui para a dinâmica. A dinâmica do campo de spin-2 é dada por

$$G^{(L)}_{\mu\nu} = 0.$$

ou, na representação de Fierz:

$$F^{\lambda(\mu\nu)}_{,\lambda} = 0.$$

Qual Lagrangiana conduz a essa equação?

MGM – 10

O caso do campo de spin-2 massivo

O termo de massa incluído na lagrangiana tem a forma

$$\mathcal{L} = A - B + \frac{m^2}{2} (\varphi_{\mu\nu} \varphi^{\mu\nu} - \varphi^2),$$

implicando na equação de movimento

$$F^\alpha_{(\mu\nu),\alpha} - m^2 (\varphi_{\mu\nu} - \varphi \eta_{\mu\nu}) = 0,$$

ou equivalentemente,

$$G^{(L)}_{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} (\varphi_{\mu\nu} - \varphi \eta_{\mu\nu}) = 0.$$

Mostre que dessas relações segue

$$\varphi^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0.$$

MGM – 11

O campo de spin-2 em um background curvo: as vantagens da representação de Fierz

A passagem da equação de spin-2 da geometria de Minkowski para uma geometria arbitrária curva pode ser feita diretamente, via acoplamento mínimo na formulação via tensor de Fierz. Com efeito, temos usando a equação acima:

$$F^{\alpha}{}_{(\mu\nu);\alpha} - m^2 (\varphi_{\mu\nu} - \varphi \eta_{\mu\nu}) = 0,$$

onde a única diferença ocorre na transformação da derivada simples (representada pela vírgula ,) por derivada covariante (representada pelo ponto-vírgula ;). Mostre, por outro lado, que como consequência da existência de derivadas duplas na equação do campo na representação que usa campo $\varphi_{\mu\nu}$ aparece uma ambiguidade na generalização da equação para geometrias curvas. Duas possibilidades aparecem $G^{(I)}{}_{\mu\nu}$ e $G^{(II)}{}_{\mu\nu}$. Quais suas formas? Uma combinação dessas duas formas reproduz corretamente a boa equação identificada acima (na representação de Fierz). Exiba essa expressão.

.....

MGM – 12

Geração de massa para o campo de spin-2

Seguiremos a mesma estratégia como fizemos nos casos dos campos de spin 0, 1/2 e 1. Começamos por considerar a lagrangiana de interação com a gravitação via relatividade geral dada por

$$\begin{aligned}\mathbb{L} &= F_{\alpha\mu\nu} F^{\alpha\mu\nu} - F_\alpha F^\alpha + \frac{1}{\kappa} R \\ &+ a R_{\alpha\mu\beta\nu} \varphi^{\alpha\beta} \varphi^{\mu\nu} \\ &- \frac{\Lambda}{\kappa}\end{aligned}$$

Calcule as equações de movimento por variação independente de $g_{\mu\nu}$ e do campo de Fierz $F_{\alpha\mu\nu}$. Mostre que a constante cosmológica induz um termo de massa para o campo.

Soluções

MGM – 2

$$\square\varphi - R B' = 0.$$

$$\frac{2}{\kappa} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}) = -T_{\mu\nu}$$

onde $B' \equiv \partial B / \partial \varphi$. O tensor $T_{\mu\nu}$ é dado por

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \frac{1}{2} \partial_\alpha \varphi \partial^\alpha \varphi g_{\mu\nu} \\ &+ 2B (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}) \\ &+ 2\nabla_\mu \nabla_\nu B - 2\square B g_{\mu\nu} + \frac{\lambda}{\kappa_0} g_{\mu\nu} \end{aligned}$$

O traço da equação se escreve

$$(\alpha_0 + 2B) R = -\partial_\alpha \varphi \partial^\alpha \varphi - 6\square B + \frac{4\lambda}{\kappa_0}$$

Escolha B para que o fator envolvendo o gradiente do campo desapareça dessa equação e redefina o campo pela translação

$$\Phi = -\varphi + 6b$$

$$B = a + b\varphi - \frac{1}{12} \varphi^2$$

onde a e b são parâmetros arbitrários. A quantidade a realiza somente uma renormalização da constante $1/\kappa_0$ e o parâmetro b é responsável para distinguir diferentes massas para diferentes campos.

Assim, o resultado final (mostre) é dado por

$$\square\Phi + \mu^2\Phi = 0$$

onde

$$\mu^2 = \frac{2\lambda}{3} \frac{\kappa_{ren}}{\kappa_0}$$

$$\kappa_{ren} = \frac{1}{\alpha_0 + 2a + 6b^2}$$

Como resultado do processo de interação gravitacional acima descrito, o campo escalar adquire uma massa μ que depende da existência da constante cosmológica (o vácuo λ .) Se λ é nulo, então a massa é nula. As diferentes massas estão contempladas no parâmetro b .

.....

MGM – 3

$$W\square\varphi + \frac{1}{2}W'\partial_\alpha\varphi\partial^\alpha\varphi - B'R = 0$$

$$\alpha_0(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}) = -T_{\mu\nu}$$

com $\alpha_0 \equiv 2/\kappa$ e $B' \equiv \partial B/\partial\varphi$.

O tensor de energia definido por

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}L)}{\delta g^{\mu\nu}}$$

é dado por

$$\begin{aligned}
 T_{\mu\nu} &= W \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \frac{1}{2} W \partial_\alpha \varphi \partial^\alpha \varphi g_{\mu\nu} \\
 &+ 2B (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}) \\
 &+ 2\nabla_\mu \nabla_\nu B - 2\Box B g_{\mu\nu} + \frac{1}{\kappa} \Lambda g_{\mu\nu}
 \end{aligned}$$

MGM - 4

$$W = \frac{2q - 6(B')^2}{\alpha_0 + 2B}$$

onde q é uma constante. Daí

$$\Box \varphi - \frac{2\Lambda}{q\kappa} B' = 0.$$

Pondo

$$B = -\frac{\beta}{4} \varphi^2$$

segue

$$\Box \varphi + \mu^2 \varphi = 0$$

obtendo então que a massa é proporcional à constante cosmológica.

$$\mu^2 = \frac{\beta \Lambda}{2}.$$

$MGM - 6$

$$\mathbb{Z} \equiv \frac{2\alpha_0 \Lambda V'}{Q}$$

$$\mathbb{X} = \frac{V'(\Phi H' - 2H - 6V'')}{Q} - H'$$

$$\mathbb{Y} = \frac{V'(2H\Phi - 6V')}{Q} - 2H$$

e $Q \equiv \alpha_0 + 2V + \Phi V'$ onde $\alpha_0 = 2/\kappa$.

Exigindo que $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = 0$ implica em uma só condição:

$$H = \frac{-3(V')^2}{\alpha_0 + 2V}.$$

O termo não mínimo V é tal que \mathbb{Z} se reduz a uma constante, isto é

$$V = \frac{\alpha_0}{2} [(1 + \sigma \Phi)^{-2} - 1]$$

Segue então

$$H = -3\alpha_0 \sigma^2 (1 + \sigma \Phi)^{-4}$$

σ é uma constante.

A equação do spinor se escreve

$$i\gamma^\mu \nabla_\mu \Psi - m\Psi = 0.$$

onde

$$m = \frac{4\sigma\Lambda}{\kappa c^2}.$$

MGM – 7

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$$

$$(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}) = -\kappa T_{\mu\nu}$$

onde $F_{\mu\nu} = \nabla_\nu W_\mu - \nabla_\mu W_\nu$ e $\alpha_0 \equiv 2/\kappa$.

MGM – 8

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} + \frac{\gamma}{3} R W^\mu + 2\gamma R^{\mu\nu} W_\nu = 0$$

$$\alpha_0 (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}) = -T_{\mu\nu}.$$

O tensor de energia tem a forma

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu} &= E_{\mu\nu} \\
&+ \frac{\gamma}{3} \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi - \frac{\gamma}{3} \square \Phi g_{\mu\nu} + \frac{\gamma}{3} \Phi (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}) \\
&+ \frac{\gamma}{3} R W_\mu W_\nu + 2\gamma R_\mu^\lambda W_\lambda W_\nu + 2\gamma R_\nu^\lambda W_\lambda W_\mu \\
&- \gamma R_{\alpha\beta} W^\alpha W^\beta g_{\mu\nu} - \gamma \nabla_\alpha \nabla_\beta (W^\alpha W^\beta) g_{\mu\nu} \\
&+ \gamma \nabla_\nu \nabla_\beta (W_\mu W^\beta) + \gamma \nabla_\mu \nabla_\beta (W_\nu W^\beta) \\
&+ \gamma \square (W_\mu W_\nu) + \frac{1}{\kappa} \Lambda g_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

onde

$$E_{\mu\nu} = F_{\mu\alpha} F^\alpha_\nu + \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} g_{\mu\nu}$$

MGM – 9

A lagrangiana tem a forma

$$L = A - B.$$

Com efeito, temos para a ação

$$\delta S = \int F^{\alpha(\mu\nu)}_{,\alpha} \delta\varphi_{\mu\nu} d^4x.$$

ou seja,

$$\delta S = -2 \int G^{(L)}_{\mu\nu} \delta\varphi^{\mu\nu} d^4x,$$

onde $G^{(L)}_{\mu\nu}$ tem a forma dada anteriormente.

MGM – 10

O traço da dinâmica dará

$$F^{\alpha}{}_{,\alpha} + \frac{3}{2} m^2 \varphi = 0,$$

e a divergência implica

$$F_{\mu} = 0.$$

Dai segue $\varphi = 0$.

Em termos do potencial temos

$$\varphi_{,\mu} - \varphi^{\epsilon}{}_{\mu,\epsilon} = 0.$$

Ou seja, os 10 graus de liberdade iniciais se transformaram em 5 graças ao vínculo

$$\varphi^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0.$$

MGM – 11

Seguindo [14] temos as duas possibilidades para a equação de spin-2 em um espaço curvo:

$$2 G^{(I)}_{\mu\nu} \equiv \square \varphi_{\mu\nu} - \varphi_{\epsilon(\mu;\nu)}{}^{;\epsilon} + \varphi_{;\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \left(\square \varphi - \varphi^{\alpha\beta}{}_{;\alpha\beta} \right),$$

$$2 G^{(II)}_{\mu\nu} \equiv \square \varphi_{\mu\nu} - \varphi_{\epsilon(\mu}{}^{;\epsilon}{}_{;\nu)} + \varphi_{;\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \left(\square \varphi - \varphi^{\alpha\beta}{}_{;\alpha\beta} \right).$$

Elas diferem somente na derivada de segunda ordem presente no segundo termo do lado direito dessas equações. A equação livre de ambiguidades é dada por

$$\widehat{G}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \left(G^{(I)}_{\mu\nu} + G^{(II)}_{\mu\nu} \right)$$

e corresponde a

$$\widehat{G}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 (\varphi_{\mu\nu} - \varphi g_{\mu\nu}) = 0.$$

que é precisamente a equação usada para um campo massivo de spin-2 obtida sem ambiguidades na representação de Fierz.

.....

MGM – 12

Temos

$$F^\alpha{}_{(\mu\nu); \alpha} + 2a R_{\alpha\mu\beta\nu} \varphi^{\alpha\beta} = 0,$$

$$\frac{1}{\kappa} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \frac{\Lambda}{2} g_{\mu\nu} \right) + T_{\mu\nu} + a Y_{\mu\nu} = 0.$$

A quantidade $Y_{\mu\nu}$ se escreve

$$Y^{\mu\nu} \equiv S^{\lambda\mu\nu\epsilon}{}_{;\epsilon;\lambda} - \frac{1}{2} R_{\alpha\sigma\beta\lambda} \varphi^{\alpha\beta} \varphi^{\sigma\lambda} g^{\mu\nu} + \frac{3}{2} R_{\alpha\sigma\beta}{}^{(\mu} \varphi^{\nu)\sigma} \varphi^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R_{\alpha\sigma\beta\lambda} \varphi^{\alpha\beta} \varphi^{\sigma\lambda} g_{\mu\nu}$$

onde

$$S_{\alpha\mu\beta\nu} \equiv \varphi_{\alpha\beta} \varphi_{\mu\nu} - \varphi_{\alpha\nu} \varphi_{\beta\mu}$$

e que possui as simetrias:

$$S_{\alpha\mu\beta\nu} = -S_{\alpha\nu\beta\mu} = -S_{\mu\alpha\beta\nu} = S_{\beta\nu\alpha\mu}.$$

Lembrando a identidade

$$R_{\alpha\mu\beta\nu} = W_{\alpha\mu\beta\nu} + \frac{1}{2} (R_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} - R_{\alpha\nu} g_{\beta\mu} - R_{\beta\mu} g_{\alpha\nu}) - \frac{1}{6} R g_{\alpha\mu\beta\nu}.$$

Mostre que

$$R_{\alpha\mu\beta\nu} \varphi^{\alpha\beta} \varphi^{\mu\nu} = W_{\alpha\mu\beta\nu} \varphi^{\alpha\beta} \varphi^{\mu\nu} + \left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{6} R g_{\alpha\beta} \right) (\varphi \varphi^{\alpha\beta} - \varphi^\alpha{}_\lambda \varphi^{\lambda\beta}).$$

Consequentemente a equação do campo de spin-2 se escreve

$$F^\alpha{}_{(\mu\nu);\alpha} - \frac{a\Lambda}{3} (\varphi_{\mu\nu} - \varphi g_{\mu\nu}) + 2a W_{\alpha\mu\beta\nu} \varphi^{\alpha\beta} + Q_{\mu\nu} = 0,$$

onde $Q_{\mu\nu}$ contém os termos não lineares da interação do campo de spin-2 com a gravitação. Note a presença do termo massivo (cf seção anterior) que se anula, como em todos os casos anteriores, quando o vazio cosmológico, representado pela constante Λ , se anula.

21 PRINCIPIO DE MACH GENERALIZADO

Vamos dar um exemplo de como é possível entender, de modo prático, o princípio de Mach, para além da noção vaga de que processos locais dependem das propriedades globais do universo. Vamos verificar que graças à influência cosmológica sobre a microfísica a dinâmica de Heisenberg (cf. seção anterior) é consequência da interação de um fermion que obedece a dinâmica linear de Dirac com o resto-do-universo [82].

Considere o acoplamento entre um fermion de Dirac e a gravitação na teoria da relatividade geral dada pela lagrangiana (usamos $\hbar = c = 1$)

$$L = L_D + \frac{1}{\kappa} R + V(X) R - \frac{1}{\kappa} \Lambda + L_{CT}$$

onde

$$L_D \equiv \frac{i}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \Psi - \frac{i}{2} \nabla_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi$$

onde o termo de acoplamento não-minimo do campo spinorial com a gravitação está contido no termo $V(X)$ que depende do escalar X definido por

$$X = A^2 + B^2$$

onde seguimos a notação de capítulo anterior: $A = \bar{\Psi} \Psi$ and $B = i \bar{\Psi} \gamma^5 \Psi$. Essa quantidade X é invariante chiral.

PMG – 1

Mostre essa afirmação.

PMG – 2

O termo L_{CT} na lagrangian serve para contrabalançar e eliminar termos da forma $\partial_\lambda X \partial^\lambda X$ e $\square X$. O termo mais geral é

$$L_{CT} = H(X) \partial_\mu X \partial^\mu X$$

Obtenha as dinâmicas de ψ e da métrica.

PMG – 3

Tomando o traço da equação da métrica mostre que obtemos

$$\begin{aligned}
(\alpha_0 + 2V + 2V' X) R &= (4HX - 6V') \square X \\
&+ (2H' X - 6V'' - 2H) \partial_\alpha X \partial^\alpha X \\
&+ 2\alpha_0 \Lambda
\end{aligned}$$

Então podemos escrever

$$\Omega = (\mathbb{M} \square X + \mathbb{N} \partial_\mu X \partial^\mu X) + \frac{4\alpha_0 \Lambda V'}{\alpha_0 + 2V + 2V' X}$$

onde

$$\mathbb{M} = \frac{2V'(4HX - 6V')}{\alpha_0 + 2V + 2V' X} - 4H$$

$$\mathbb{N} = \frac{2V'(2XH' - 6V'' - 2H)}{\alpha_0 + 2V + 2V' X} - 2H'$$

Inserindo este resultado na equação do fermion tem-se:

$$i\gamma^\mu \nabla_\mu \Psi + (\mathbb{M} \square X + \mathbb{N} \partial_\lambda X \partial^\lambda X) \Psi + \mathbb{Z} (A + iB\gamma^5) \Psi = 0$$

onde

$$\mathbb{Z} = \frac{4\alpha_0 \Lambda V'}{\Delta}$$

e definimos $\Delta \equiv \alpha_0 + 2V + 2V' X$ que permite escrever \mathbb{M} e \mathbb{N} sob a forma

$$\mathbb{M} = -\frac{4}{\Delta} (3V'^2 + H(\alpha_0 + 2V))$$

$$\mathbb{N} = -\frac{2}{\Delta} (3V'^2 + H(\alpha_0 + 2V))'$$

.....

Neste estágio, selecione os possíveis valores de V e H de tal modo que os termos em gradiente e em \square desapareçam da equação de Ψ obtendo a equação de Heisenberg. Qual a forma final da lagrangian?

Resumindo: quando a constante cosmológica se anula a dinâmica do fermion é dada pela expressão de Dirac

$$i\gamma^\mu \nabla_\mu \Psi = 0$$

No outro caso, segundo Mach, obtem-se a dinâmica de Heisenberg

$$i\gamma^\mu \nabla_\mu \Psi - 2s(A + iB\gamma^5) \Psi = 0.$$

.....

PMG – 5

Considere uma situação semelhante ao caso anterior de uma teoria do campo eletromagnético interagindo com a gravitação de modo controlado pela lagrangiana [carlos]

$$L = -\frac{1}{4} F + \frac{1}{\kappa} R + \frac{1}{\kappa} \Lambda + \frac{1}{\kappa} V(F) R + L_{CT}$$

Note que $V(F)$ é adimensional e representa acoplamento não-minimo com a gravitação; o contra-termo L_{CT} , depende somente de F e primeiras derivadas é introduzido para eliminar derivadas de ordem superior que apareceriam devido ao acoplamento não-minimo (como apareceriam?). Qual a forma mais geral desse contra-termo? Escreva as equações que decorrem dessa lagrangiana variando o campo eletromagnético e a métrica. Mostre que a escolha conveniente de V e

de H que eliminam derivadas superiores induz uma equação de movimento para o campo $F_{\mu\nu}$ que pode ser escrito sob a forma

$$L_F F_{;\nu}^{\mu\nu} + L_{FF} F^{\mu\nu} F_\nu = 0.$$

onde $L_F = \partial L / \partial F$.

Escolhendo V e H para eliminar termos em gradiente e no d'Alambertiano $\square F$ das expressões de X e Ω encontramos para a expressão de X para eliminar $\square F$

$$H + 3 \frac{(V')^2}{\kappa(1 + 2V)} = 0.$$

Mostre que essa única condição é suficiente para eliminar todos os demais termos em gradiente de F de X e Ω bem como o termo em $\square F$ de Ω .

Soluções

PMG – 1

$$\Psi' = \gamma^5 \Psi.$$

Com efeito, sob a transformação γ^5 segue

$$A' = -A, \quad B' = -B; \quad \text{then, } X' = X.$$

*PMG – 2***Variação independente de Ψ e $g_{\mu\nu}$ implica**

$$i\gamma^\mu \nabla_\mu \Psi + \Omega (A + iB\gamma^5)\Psi = 0.$$

onde

$$\Omega \equiv 2RV' - 2H' \partial_\mu X \partial^\mu X - 4H\Box X$$

e temos para a métrica a equação

$$\alpha_0 (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}) = -T_{\mu\nu}$$

onde $\alpha_0 \equiv 2/\kappa$ e $V' \equiv \partial V/\partial X$. O tensor de energia tem a forma

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \frac{i}{4} \bar{\Psi} \gamma_{(\mu} \nabla_{\nu)} \Psi - \frac{i}{4} \nabla_{(\mu} \bar{\Psi} \gamma_{\nu)} \Psi \\ &+ 2V(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}) + 2\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} V - 2\Box V g_{\mu\nu} \\ &+ 2H \partial_{\mu} X \partial_{\nu} X - H \partial_{\lambda} X \partial^{\lambda} X g_{\mu\nu} + \frac{\alpha_0}{2} \Lambda g_{\mu\nu} \end{aligned}$$

PMG - 4

O modo mais simple é colocar $\mathbb{M} = \mathbb{N} = 0$, que é satisfeito se

$$H = -\frac{3V'^2}{\alpha_0 + 2V}$$

Impondo que \mathbb{Z} deve se reduzir a uma constante tem-se

$$V = \frac{1}{\kappa} \left[\frac{1}{1 + \beta X} - 1 \right].$$

Como consequência

$$H = -\frac{3\beta^2}{2\kappa} \frac{1}{(1 + \beta X)^3}$$

onde β é uma constante. Tem-se então que Ψ satisfaz a dinâmica dada por

$$i\gamma^\mu \nabla_\mu \Psi - 2s(A + iB\gamma^5)\Psi = 0$$

onde

$$s = \frac{2\beta\Lambda}{\kappa(\hbar c)}.$$

A lagrangian tem a forma final dada por

$$L = L_D + \frac{1}{\kappa(1+\beta X)} R - \frac{1}{\kappa} \Lambda - \frac{3\beta^2}{2\kappa} \frac{1}{(1+\beta X)^3} \partial_\mu X \partial^\mu X.$$

.....

PMG – 5

Variando o potencial electromagnetico potential A_μ e a métrica $g_{\mu\nu}$ tem-se

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} - \frac{4}{\kappa} [R V' F^{\mu\nu}]_{;\nu} - 4[H' F_\lambda F^\lambda F^{\mu\nu}]_{;\nu} + 8[(H F^\lambda)_{;\lambda} F^{\mu\nu}]_{;\nu} = 0$$

onde V' representa a derivada em relação a F , e

$$\frac{1}{\kappa} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}) = -T_{\mu\nu}$$

onde

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g} L_m}{\delta g^{\mu\nu}}.$$

Por um cálculo direto obtemos

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= F_{\mu\alpha} F^\alpha{}_\nu + \frac{1}{4} F g_{\mu\nu} \\ &+ \frac{2V}{\kappa} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}) + \frac{2}{\kappa} \nabla_\mu \nabla_\nu V - \frac{2}{\kappa} \square V g_{\mu\nu} \\ &+ 2H F_\mu F_\nu - H F_\lambda F^\lambda g_{\mu\nu} + \frac{\Lambda}{\kappa} g_{\mu\nu} \end{aligned}$$

onde $F_\mu = \partial_\mu F$ e o traço da equação da métrica permite escrever

$$R = \frac{1}{(1+2V)} (4\Lambda - 6V' \square F - (6V'' + 2\kappa H) F_\mu F^\mu)$$

Finalmente, temos

$$X F^{\mu\nu}{}_{;\nu} + \Omega F^{\mu\nu} F_\nu = 0.$$

onde

$$\begin{aligned} X &\equiv 1 - \frac{16\Lambda V'}{\kappa(1+2V)} \\ &+ F_\alpha F^\alpha \left(4H' + \frac{8HV'}{(1+2V)} + \frac{24V'V''}{\kappa(1+2V)} \right) \\ &+ \square F \left(8H + \frac{24(V')^2}{\kappa(1+2V)} \right) \parallel \end{aligned}$$

$$\Omega F_\nu = -\frac{4}{\kappa} (RV')_{;\nu} - 4(H' F_\lambda F^\lambda)_{;\nu} + 8(HF^\lambda)_{;\lambda;\nu}$$

Escolhendo V e H para eliminar termos em gradiente e no d'Alambertiano $\square F$ das expressões de X e Ω . Temos

$$H + 3 \frac{(V')^2}{\kappa(1+2V)} = 0.$$

a outra condição

$$H' + \frac{2HV'}{\kappa(1+2V)} + \frac{6V'V''}{\kappa(1+2V)} = 0$$

nada mais é do que a derivada dessa primeira.

Assim, tem-se

$$X = 1 - \frac{16\Lambda}{\kappa} \left(\frac{V'}{1+2V} \right).$$

Segue o belo resultado: essa condição elimina todos os demais termos indesejáveis em \square de F que aparecem em Ω . Temos assim

$$L_F F_{;\nu}^{\mu\nu} + L_{FF} F^{\mu\nu} F_\nu = 0.$$

onde $L_F = \partial L / \partial F$.

Podemos escrever a lagrangiana sob a forma

$$L = F - \frac{8\Lambda}{\kappa} \ln(1+2V).$$

Concluimos então que dada uma teoria não linear $L(F)$ a interação não mínima com a gravitação através V e H fica determinada pela expressão acima. Ou, de forma inversa, especificando a dependência de $V(F)$ determina a lagrangiana não linear $L(F)$. Isso só é possível graças à influência da constante cosmológica. Se ela for nula, a teoria se reduz à expressão linear de Maxwell.

22 GEOMETRIA RESTRITA DE CARTAN: DOIS CAMPOS DE SPIN-2

Comentário Uma generalização da geometria de Riemann foi estabelecida pelo matemático francês E. Cartan [83] introduzindo uma conexão afim $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ que não possui a simetria nos dois índices covariante. Uma tal estrutura foi utilizada em várias ocasiões para ir além da teoria da relatividade geral em particular em processos gravitacionais envolvendo campos de spin semi-inteiro. Essa geometria teve grande sucesso, embora efêmero, quando Trautman e outros mostraram que a torção associada a essa geometria poderia evitar o aparecimento de singularidade no cenário cosmológico. Aqui, nós iremos somente considerar alguns aspectos da teoria de campos associado a essa geometria. Nós iremos verificar que a torção geométrica pode esconder a presença de dois campos de spin-2. Usaremos as definições da geometria de Cartan descritas no capítulo primeiro.

.....

Geometria de Cartan Restrita (RCG)

Considere a geometria de Cartan sem pseudo-traço:

$$\tau_\alpha^* = 0.$$

Essa condição elimina 4 graus de liberdade da torção. Definimos $F_{\mu\nu}^\alpha$ que possui 20 graus de liberdade (mostre) pela forma

$$\tau^{\alpha}_{\mu\nu} - g^{\alpha\epsilon}_{\mu\nu} \tau_{\epsilon} = F_{\mu\nu}{}^{\alpha}.$$

Temos as propriedades (mostre):

$$F_{\mu\nu\alpha} = -F_{\nu\mu\alpha}.$$

$$\overset{*}{F}{}^{\alpha}_{\beta\alpha} = 0$$

ou seja

$$F_{\mu\nu\alpha} + F_{\nu\alpha\mu} + F_{\alpha\mu\nu} = 0.$$

Seguindo Fierz [corson], podemos descrever $F_{\alpha\mu\nu}$ em termos de dois tensores simétricos de ordem-2: $A_{\mu\nu}$ e $B_{\mu\nu}$. Vmos considerar em um primeiro momento que um desses campos, digamos $B_{\mu\nu}$ se anula.

Mostre que podemos escrever

$$2 F_{\alpha\beta\mu} = A_{\mu[\alpha,\beta]} + (A_{,\alpha} - A_{\alpha}{}^{\epsilon}{}_{,\epsilon}) \eta_{\beta\mu} - (A_{,\beta} - A_{\beta}{}^{\epsilon}{}_{,\epsilon}) \eta_{\alpha\mu},$$

onde $A = A_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu}$.

O traço F_{α} é dado por

$$F_{\alpha} = F_{\alpha\mu\nu} \eta^{\mu\nu}$$

isto é,

$$F_{\alpha} = A_{,\alpha} - A_{\alpha}{}^{\epsilon}{}_{,\epsilon}.$$

Pode-se então re-escrever $F_{\alpha\beta\mu}$ sob a forma (mostre) compacta:

$$2 F_{\alpha\beta\mu} = A_{\mu[\alpha,\beta]} + F_{[\alpha} \eta_{\beta]\mu},$$

onde usamos $[x, y] \equiv xy - yx$ e usaremos também $(x, y) \equiv xy + yx$.

Escreveremos, como no capítulo primeiro, a conexão usando a contorção $K_{\alpha\beta\mu}$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\epsilon} = \{\epsilon_{\mu\nu}\} + K_{\mu\nu}^{\epsilon}$$

Mostre que podemos escrever

$$K_{\mu\nu}^{\epsilon} = 2F_{\nu\mu}^{\epsilon} + F_{\nu}^{\delta} \delta_{\mu}^{\epsilon} - F^{\epsilon} \eta_{\mu\nu}$$

ou, equivalentemente

$$K_{\epsilon\mu\nu} = A_{\epsilon\mu,\nu} - A_{\mu\nu,\epsilon},$$

Tensor de curvatura na geometria restrita de Cartan (RCG)

O tensor de curvatura é definido como

$$R^{\alpha}{}_{\sigma\beta\lambda} = \Gamma_{\beta\sigma,\lambda}^{\alpha} - \Gamma_{\lambda\sigma,\beta}^{\alpha} + \Gamma_{\lambda\rho}^{\alpha} \Gamma_{\beta\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} \Gamma_{\beta\rho}^{\alpha}.$$

No background de Minkowski a contração é dada por (mostre):

$$R_{\mu\nu} = K^{\alpha}{}_{\alpha\mu,\nu} - K^{\alpha}{}_{\nu\mu,\alpha} + K^{\alpha}{}_{\nu\rho} K^{\rho}{}_{\alpha\mu} - K^{\alpha}{}_{\alpha\rho} K^{\rho}{}_{\nu\mu},$$

ou seja

$$R_{\mu\nu} = \square A_{\mu\nu} - A^{\alpha}{}_{(\mu,\nu)\alpha} + A_{,\mu\nu} + [KK]_{\mu\nu}$$

onde

$$[KK]_{\mu\nu} \equiv K^{\alpha}{}_{\nu\rho} K^{\rho}{}_{\alpha\mu} - K^{\alpha}{}_{\alpha\rho} K^{\rho}{}_{\nu\mu}$$

$$\square \equiv \eta^{\mu\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu}.$$

Mostre que podemos escrever

$$[KK]_{\mu\nu} \equiv (A_{\nu\alpha,\rho} - A_{\nu\rho,\alpha})(A^{\alpha\rho}_{,\mu} - A_{\mu}^{\alpha,\rho}) - (A_{,\alpha} - A_{\alpha}^{\epsilon}_{,\epsilon})\eta^{\alpha\rho}(A_{\nu\rho,\mu} - A_{\nu\mu,\rho}).$$

Segue $[KK] \equiv [KK]_{\mu\nu} \eta^{\mu\nu}$,

$$[KK] = -2U$$

onde U é o invariante

$$U \equiv F_{\alpha\beta\mu} F^{\alpha\beta\mu} - F_{\alpha} F^{\alpha}.$$

.....

Mostre que o escalar de curvatura nas condições acima se escreve

$$R = 2\Box A - 2A^{\alpha\beta}_{,\alpha\beta} - 2U.$$

ou também sob a forma

$$R = 2(F^{\alpha}_{,\alpha} - U).$$

.....

Considere a dinâmica da torção restrita a um campo de spin-2 como dada pelo escalar de curvatura da geometria de Cartan. Mostre que temos

$$S = \int R d^4x = -2 \int U d^4x$$

a menos de uma divergência total.

Essa dinâmica foi introduzida por Fierz [fierz] para descrever um campo de spin-2 e corresponde ao limite linear da Relatividade Geral (mostre).

Com efeito, temos

$$\delta S = - \int 2F^{\alpha(\mu\nu)},_{\alpha} \delta A_{\mu\nu} d^4x$$

Pela identidade

$$F^{\alpha\mu\nu},_{\alpha} = \frac{1}{2} F^{\alpha(\mu\nu)},_{\alpha} = -\frac{1}{2} G^L{}_{\mu\nu},$$

temos

$$\delta S = 2 \int G^L{}_{\mu\nu} \delta A^{\mu\nu} d^4x,$$

onde

$$G^L{}_{\mu\nu} \equiv \square A_{\mu\nu} - A^{\epsilon}{}_{(\mu,\nu),\epsilon} + A_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} (\square A - A^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta}),$$

onde L significa linearização das equações da RG.

Podemos então afirmar:

- A restrição da torção (10 graus de liberdade) descreve um tensor simétrico de segunda ordem $A_{\mu\nu}$;
- A dinâmica gerada pelo escalar de curvatura (ação de Hilbert-Einstein) gera a equação linear do campo de spin-2 $A_{\mu\nu}$.

Mostre que ao considerarmos os outros 10 graus de liberdade da torção e seguindo um caminho semelhante ao que desenvolvemos acima podemos descrever dois campos de spin-2.

Mostre que o escalar de curvatura se escreve

$$R = K^{\alpha}{}_{\alpha\mu,\nu} \eta^{\mu\nu} - K^{\alpha}{}_{\mu\nu,\alpha} \eta^{\mu\nu} + [KK].$$

onde

$$K^{\alpha}{}_{\alpha\mu} = F_{\mu}$$

$$K_{\mu\alpha\beta} \eta^{\alpha\beta} = -F_{\mu}$$

$$K_{\alpha\mu\rho} K^{\rho\alpha\mu} = 2F_{\alpha\rho\mu} F^{\mu\alpha\rho} - F_{\mu\alpha\rho} F^{\mu\alpha\rho} + 2A^\alpha A_\alpha - 4F_\alpha^* \Sigma^\alpha - 6\Sigma_\alpha \Sigma^\alpha.$$

Ou seja

$$[KK] = -2A_{\alpha\beta\mu} A^{\alpha\beta\mu} + 2B_{\alpha\beta\mu} B^{\alpha\beta\mu} - 2B_\alpha B^\alpha + 2A_\alpha A^\alpha + 4B_\alpha \Sigma^\alpha - 6\Sigma_\alpha \Sigma^\alpha - 4A^{\alpha\beta\mu} B_{\alpha\beta\mu}^*.$$

E daí (como?)

$$R = \mathbf{div} - 2U[A_{\alpha\beta}] + 2U[B_{\alpha\beta}].$$

Mostre enfim que a dinâmica

$$S = \int R d^4x$$

gera, por variações independentes de $A_{\mu\nu}$ e $B_{\mu\nu}$, as equações para os dois campos de spin-2:

$$G^L_{\mu\nu}(A) \equiv \square A_{\mu\nu} - A^\epsilon_{(\mu,\nu),\epsilon} + A_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} (\square A - A^{\alpha\beta}_{,\alpha\beta}) = 0.$$

$$G^L_{\mu\nu}(B) \equiv \square B_{\mu\nu} - B^\epsilon_{(\mu,\nu),\epsilon} + B_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} (\square B - B^{\alpha\beta}_{,\alpha\beta}) = 0.$$

.....

Generalize o resultado anterior no caso de um background riemanniano curvo

23 TEORIA DAS PERTURBAÇÕES (MODOS DE VIBRAÇÃO DO UNIVERSO)

A quase totalidade dos textos dedicados à teoria das perturbações em cosmologia usam os métodos originais estabelecidos em [1] e com as posteriores discussões e alterações envolvendo a questão da escolha de sistema de coordenadas, o chamado problema da gauge [84] [85]. Nós iremos seguir uma outra forma de analisar esse problema. Embora se trata de um método que tenha sido estabelecido há muito tempo [86] sua difusão foi pequena. Há várias razões de natureza não científicas para isso. Não é nosso objetivo fazer aqui essa história. Queremos sim exhibir esse método que, em vários casos é superior ao método usual.

Dessa forma, contrariamente ao que aconteceu nos capítulos anteriores, farei aqui uma introdução mais demorada retirada do livro [6].

Introdução

Vamos considerar aqui a questão da estabilidade de modelos cosmológicos. Perturbações do tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$ geram modificações na geometria. Devido à não linearidade dessas equações, a métrica perturbada $g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ não

satisfaz necessariamente às equações de Einstein. Limitaremos nosso estudo a variações δT^μ_ν do tensor momento-energia que estão acopladas à métrica $\delta g_{\mu\nu}$ através das equações de Einstein perturbadas:

$$\delta R^\mu_\nu - \frac{1}{2} (\delta R) \delta^\mu_\nu = -k \delta T^\mu_\nu \quad (23.1)$$

As quantidades perturbadas envolvem a geometria e a matéria e usualmente são dadas por:

- (i) tensor métrico: $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} = \tilde{g}_{\mu\nu}$
- (ii) densidade de energia: $\rho \rightarrow \rho + \delta\rho = \tilde{\rho}$
- (iii) velocidade do fluido: $v^\mu \rightarrow v^\mu + \delta v^\mu = \tilde{v}^\mu$
- (iv) pressão: $p \rightarrow p + \delta p = \tilde{p}$

Nessas expressões, $\delta\rho$, δp , δv^μ e $\delta g^{\mu\nu}$ serão considerados quantidades pequenas, isto é, $(\delta\rho)^2 \ll \delta\rho$, etc. Como consequência dessas modificações, quantidades funcionais associadas sofrem alterações, que serão sempre consideradas na aproximação linear.

Tem sido uma prática comum, a partir do trabalho seminal de Lifshitz [Lifshitz]) ao considerar a teoria da perturbação das equações da Relatividade Geral, examinar variações de quantidades não-observáveis como $\delta g_{\mu\nu}$. A partir desta variação obtém-se as demais quantidades envolvendo o tensor de curvatura e suas contrações. De forma correspondente, variações das quantidades representando a cinemática e a dinâmica da fonte seriam consideradas gerando $\delta T_{\mu\nu}$, relacionadas pelas equações perturbadas como acima. A principal dificuldade deste método é que ele mistura verdadeiras perturbações com transformações arbitrárias (infinitesimais) de coordenadas. Tem-se assim uma questão adicional: separar verdadeiras perturbações de simples transformações de coordenadas. Esta dificuldade é conhecida na literatura como *o problema da gauge* da teoria das perturbações. Soluções foram encontrada por diversos autores [85], [87],[86]) que procuraram combinações que fossem independentes de gauge a partir das quantidades fundamentais escritas em termos do tensor métrico e suas derivadas. O passo seguinte consiste em usar as equações da Relatividade Geral para estabelecer a evolução dinâmica destas quantidades fisicamente relevantes.

Há, entretanto, um outro método, mais direto e muito mais simples e útil quando se trata de examinar a perturbação da geometria de Friedmann. Trata-se de es-

colher, desde o começo, variáveis físicas, quantidades observáveis e procurar um sistema dinâmico que permite tratar somente com estas quantidades. Isto é, neste método não é sequer necessário evitar a questão de gauge: ela simplesmente não existe. Veremos aqui como ele funciona¹.

Vimos que há dois modos distintos mas equivalentes de considerar as equações da Relatividade Geral. Um deles, consiste na forma tradicional e gera a equação

$$\delta R_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2} \delta R \delta_{\nu}^{\mu} = -\kappa \delta T_{\nu}^{\mu}.$$

O outro método usa as equações JEK. O caso de um universo do tipo Friedmann, conformalmente plano, permite antecipar que JEK seria mais conveniente, posto que qualquer variação do tensor de Weyl é reconhecida de imediato como uma verdadeira perturbação, eliminando qualquer eventual ambiguidade.

A variação do tensor de Weyl conforme $\delta W_{\alpha\beta\mu\nu}$ é então a quantidade básica a ser considerada, posto que ela não pode ser obtida por uma transformação de coordenadas. Esta situação resolve *ab initio* o problema de gauge. Igualmente crucial é o fato de que para se obter um sistema dinâmico fechado para a perturbação, em JEK, não é necessário o conhecimento de todas as componentes de $\delta g_{\mu\nu}$.

De um ponto de vista técnico, é conveniente considerar todas as quantidades perturbadas como funções escalares. Para realizar isso, expandem-se todas as quantidades em uma base completa de funções (por exemplo, em termos de harmônicos esféricos). Dividimos, assim, as quantidades perturbadas em duas classes:

- Classe A: quantidades que são nulas na geometria não-perturbada;
- Classe B: quantidades que não são nulas na geometria não-perturbada.

Pela análise tensorial, somente deveríamos nos concentrar na classe A, posto que qualquer perturbação delas não pode resultar de uma transformação de coordenadas. Consequentemente, lidando somente com a classe A, a questão da dificuldade de gauge não aparece. É o método que iremos seguir. Nós mostraremos que é possível considerar um conjunto fechado de quantidades dinâmicas

¹Para estabelecer um ponto de contacto com o método tradicional de Lifshitz que cuida de quantidades como $\delta g_{\mu\nu}$, nós iremos examinar também, secundariamente, a evolução destas quantidades associadas que são dependentes de gauge.

que conterão toda a informação sobre o sistema perturbado. Isto é, chamando de $\mathcal{M}_{[A]}$ este conjunto, as equações da Relatividade Geral devem prover a dinâmica de cada elemento de $\mathcal{M}_{[A]}$, dependendo somente de quantidades não-perturbadas (e, eventualmente de outros elementos de $\mathcal{M}_{[A]}$). Vejamos como isso é possível.

Exercício: Qual o conjunto de variáveis que poderíamos escolher para, dentro deste esquema, considerar perturbações da métrica de Friedmann?

Um exemplo simples: perturbação da métrica de Friedmann

A geometria de Friedmann se escreve, em um sistema gaussiano de coordenadas, como

$$ds^2 = dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j \quad (23.2)$$

onde

$$g_{ij} = -A^2(t) \gamma_{ij}(x^k).$$

A geometria tridimensional $\gamma_{ij}(x^k)$ tem curvatura constante e, conseqüentemente seu tensor de Riemannian ${}^{(3)}R_{ijkl}$ se escreve como

$${}^{(3)}R_{ijkl} = \epsilon \gamma_{ijkl}.$$

Derivada covariante no espaço-tempo quadridimensional será denotado pelo símbolo (\cdot) e no 3-espaço por (\parallel). Desde o artigo original de Lifshitz [Lifshitz] tem sido usada a decomposição das quantidades perturbadas na base de harmônicos esféricos. Nessa introdução à teoria das perturbações, vamos nos limitar a perturbações irrotacionais. Conseqüentemente é suficiente considerar o harmônico escalar $Q(x^k)$ (com $\dot{Q} = 0$) e as quantidades vetoriais e tensoriais que podem dele derivar. Tem-se assim

$$Q_i \equiv Q_{,i}$$

$$Q_{ij} \equiv Q_{,ij}$$

onde o escalar Q obedece à equação de autovalor definida no 3-espaço dada por:

$$\nabla^2 Q = \frac{1}{k^2} Q$$

k é o comprimento de onda da perturbação e

$$\nabla^2 Q \equiv \gamma^{ik} Q_{,i\parallel k} = \gamma^{ik}$$

o símbolo ∇^2 denota o laplaciano tridimensional. O operador sem traço \hat{Q}_{ij} é definido como

$$\hat{Q}_{ij} = Q_{ij} - \frac{1}{3k^2} Q \gamma_{ij}$$

e a divergência de \hat{Q}_{ij} vale (mostre este resultado)

$$\hat{Q}^{ik}_{;k} = -2 \left(\epsilon - \frac{1}{3k^2} \right) Q^i.$$

Lembremos que Q é um objeto tridimensional; conseqüentemente, subir e descer índices das quantidades derivadas deve ser feita com a métrica tridimensional γ^{ij} .

Perturbação geométrica

Da análise anterior segue que

$$\sqrt{\delta E_{ij} \delta E^{ij}}$$

é a única quantidade capaz de caracterizar, sem ambiguidade, uma verdadeira perturbação dos invariantes de Debever. Isto é devido à anulação da perturbação da parte magnética do tensor de Weyl, consequência de que estamos considerando somente perturbações escalares irrotacionais. Precisamos considerar somente a quantidade perturbada E_{ij} , posto que qualquer outra quantidade métrica não pertence ao núcleo fundamental necessário para um conhecimento completo das perturbações verdadeiras. Vamos então expandir em termos dos harmônicos esféricos.

$$\delta E_{ij} = E(t) \hat{Q}_{ij}(x^i).$$

Note que esta expansão é uma soma em k que deixaremos de escrever por simplicidade, uma vez que cada componente pode ser considerada de maneira independente, devido à linearidade da perturbação. Assim, $E(t)$ será a quantidade geométrica cuja dinâmica queremos obter.

Perturbação cinemática

Como estamos limitando nossa análise a perturbações lineares, a normalização da quadri-velocidade mostra que a variação da componente temporal da velocidade perturbada está relacionada à variação da componente (0-0) do tensor métrico, isto é:

$$\delta v_0 = \frac{1}{2} \delta g_{00}.$$

As quantidades contravariantes correspondentes estão relacionadas como segue:

$$\delta v^0 = \frac{1}{2} \delta g^{00} = -\delta v_0.$$

A expansão da perturbação da 4-velocidade em termos da base dos harmônicos esféricos é (note que a vorticidade é zero, pois estamos nos limitando ao caso irrotacional):

$$\delta v_0 = \frac{1}{2}\beta(t) Q(x^i) + \frac{1}{2}Y(t)$$

$$\delta v_k = V(t) Q_k(x^i).$$

Para a aceleração pomos

$$\delta a_k = \Psi(t) Q_k(x^i).$$

Para o *shear*

$$\delta\sigma_{ij} = \Sigma(t) \hat{Q}_{ij}(x^k)$$

e para a expansão

$$\delta\theta = H(t) Q(x^i) + Z(t)$$

onde $Y(t)$ e $Z(t)$ são termos homogêneos que não representam verdadeiras perturbações.

É importante notar que como estamos limitando nossa análise a verdadeiras quantidades perturbadas, a variável cinemática que importa e cuja dinâmica devemos examinar é somente $\Sigma(t)$, posto que a outra quantidade que é invariante de gauge (e que no "background" se anula) Ψ é uma função de Σ e E .

Perturbação da matéria

Como estamos considerando uma geometria do *background* onde a fonte é um fluido perfeito que possui uma equação de estado $p = \lambda\rho$, seguiremos o procedimento convencional que admite a preservação desta equação de estado sob perturbações arbitrárias. Ademais, no sistema em que nos colocamos não existe fluxo de calor. Assim, a forma mais geral de perturbação é dada por

$$\delta T_{\mu\nu} = (1 + \lambda) \delta(\rho v_\mu v_\nu) - \lambda \delta(\rho g_{\mu\nu}) + \delta \Pi_{\mu\nu}.$$

Escreveremos $\delta\rho$ na base escalar:

$$\delta\rho = N(t) Q(x^i) + \mu(t)$$

onde o termo homogêneo $\mu(t)$ não corresponde a uma verdadeira perturbação. Admitiremos $Y = Z = \mu = 0$, pois estes termos homogêneos são quantidades

que podem ser eliminadas por escolha conveniente do sistema de coordenadas e não estamos interessados em quantidades que dependem de gauge.

De acordo com a termodinâmica causal, a evolução da pressão anisotrópica está relacionada com o shear através da relação

$$\tau \dot{\Pi}_{ij} + \Pi_{ij} = \xi \sigma_{ij}$$

onde τ é o parâmetro de relaxação e ξ o parâmetro de viscosidade. Para simplificar nossa análise, vamos nos limitar ao caso em que τ pode ser desprezado e ξ é uma constante. Tem-se então

$$\Pi_{ij} = \xi \sigma_{ij}$$

e a perturbação associada:

$$\delta \Pi_{ij} = \xi \delta \sigma_{ij}.$$

Seguindo o mesmo raciocínio, $\delta \Pi_{ij}$ é a quantidade material que deve entrar no sistema completo de equações diferenciais que descrevem a evolução da perturbação. Em geral, está-se interessado também pela perturbação da densidade de matéria $\delta \rho$ embora ela não faça parte deste conjunto fundamental. Voltaremos a ela mais adiante.

Assim, do que vimos, o “bom” conjunto $\mathcal{M}_{[A]}$ tem somente três elementos: δE_{ij} , $\delta \sigma_{ij}$ e $\delta \Pi_{ij}$. Entretanto, como $\delta \Pi_{ij}$ pode ser escrito em termos de $\delta \sigma_{ij}$, o conjunto $\mathcal{M}_{[A]}$ que iremos considerar se reduz a

$$\mathcal{M}_{[A]} = \{\delta E_{ij}, \delta \sigma_{ij}\}.$$

.....

Dinâmica

A aplicação à teoria da perturbação do esquema JEK das equações da gravitação permite obter um resultado notável: as quantidades fundamentais observáveis, relevantes para obtermos a evolução das perturbações, se reduz ao conjunto

$$\mathcal{M}_{[A]} = \{E(t), \Sigma(t)\}$$

em termos dos quais toda a dinâmica perturbada necessária para caracterizar completamente o espectro de perturbações pode ser obtida. Com efeito, as equações de evolução destas duas quantidades dadas pelas equações da Relatividade Geral, geram um sistema dinâmico envolvendo somente E e Σ , além de quantidades conhecidas da métrica não-perturbada e que, quando resolvidas, contém toda a informação necessária para uma descrição completa das demais quantidades perturbadas da geometria de Friedmann. Este resultado seria extremamente difícil de ser obtido pelo método convencional, seja ele a formulação original de Lifshitz, seja a modificação proporcionada por Bardeen e outros (ver referência na bibliografia).

A equação do *shear*

As equações de perturbação do *shear* se escrevem como:

$$\begin{aligned} h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} (\delta\sigma_{\mu\nu})^{\bullet} &+ \frac{2}{3}\Theta \delta\sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}h_{\alpha\beta} \delta a^{\lambda}_{;\lambda} \\ &- \frac{1}{2}h_{\alpha}^{\mu} h_{\beta}^{\nu} [\delta a_{\mu;\nu} + \delta a_{\nu;\mu}] \\ &= \delta M_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

onde

$$M_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\mu\beta\nu} v^{\mu} v^{\nu} - \frac{1}{3}R_{\mu\nu} v^{\mu} v^{\nu} h_{\alpha\beta}.$$

Usando a expansão em harmônicos esféricos mostre que as equações para o *shear* e a parte elétrica do tensor de weyl, dadas por (Σ, E) se escrevem:

$$\dot{\Sigma} = -E - \frac{1}{2}\xi \Sigma - k^2 \Psi.$$

$$\begin{aligned}\dot{E} &= -\frac{(1+\lambda)}{2}\rho\Sigma - \left(\frac{\Theta}{3} + \frac{\xi}{2}\right)E \\ &\quad - \frac{\xi}{2}\left(\frac{\xi}{2} + \frac{\Theta}{3}\right)\Sigma - \frac{k^2}{2}\xi\Psi.\end{aligned}$$

Essas duas equações contém três variáveis: E , Σ and Ψ . Mostre que usando a lei de conservação da matéria, podemos eliminar Ψ em todos os casos de fluido perfeito, exceto quando $(1 + \lambda) = 0$.

O resultado dá:

$$(1 + \lambda)\rho\Psi = \lambda[N - \dot{\rho}V] + 2\xi\left(\frac{1}{3} - \frac{K}{m}\right)A^{-2}\Sigma.$$

Mostre que o lado direito desta equação pode ser expresso em termos das variáveis E e Σ somente (posto que estamos assumindo que $1 + \lambda \neq 0$).

Com efeito, da equação da divergência da parte elétrica do tensor de Weyl, tem-se

$$N - \dot{\rho}V = \left(1 + \frac{3\epsilon}{k^2}\right)\xi\Sigma a^{-2} - 2\left(1 + \frac{3\epsilon}{k^2}\right)a^{-2}E.$$

Combinando com a equação anterior vemos que Ψ é dado em função de quantidades não perturbadas e de E e Σ :

$$(1 + \lambda)\rho\Psi = 2\left(1 + \frac{3\epsilon}{k^2}\right)A^{-2}\left[-\lambda E + \frac{1}{2}\lambda\xi\Sigma + \frac{1}{3}\xi\Sigma\right].$$

Assim, mostramos que todo o conjunto básico de perturbação se reduz a um sistema dinâmico não-autônomo nas variáveis E e Σ :

$$\dot{\Sigma} = F_1(\Sigma, E)$$

$$\dot{E} = F_2(\Sigma, E)$$

com

$$F_1 \equiv -E - \frac{1}{2}\xi \Sigma - k^2 \Psi$$

$$\begin{aligned} F_2 &\equiv -\left(\frac{1}{3}\Theta + \frac{1}{2}\xi\right) E \\ &\quad - \left(\frac{1}{4}\xi^2 + \frac{(1+\lambda)}{2}\rho + \frac{1}{6}\xi\Theta\right) \Sigma \\ &\quad - \frac{k^2}{2} \xi \Psi \end{aligned}$$

onde, como vimos, Ψ é dado em termos de E e Σ .

.....

Dinâmica da perturbação de ρ e θ

Vimos que uma verdadeira perturbação da métrica de Friedmann se constrói um sistema dinâmico envolvendo somente E e Σ . Todas as demais quantidades podem então ser calculadas a partir do conhecimento deste sistema fundamental [joras]. As equações de evolução das perturbações da densidade de energia e da expansão são dadas para suas componentes na base de harmônicos esféricos por:

$$\dot{N} - \frac{1}{2}\beta \dot{\rho} + (1+\lambda)\Theta N + (1+\lambda)\rho H = 0.$$

e, via equação de Raychaudhuri perturbada:

$$\dot{H} - \frac{1}{2}\beta \dot{\Theta} + \frac{2}{3}\Theta H - \frac{k^2}{a^2} \Psi + \frac{(1+3\lambda)}{2} N = 0.$$

Para resolver estas duas equações é preciso fixar a gauge ($\beta(t)$) e usar os valores de E e Σ obtidos do sistema fechado fundamental. De modo análogo, todas as demais quantidades geométricas e cinemáticas podem ser obtidas, o que exaure completamente nossa análise das perturbações irrotacionais do universo de Friedmann.

.....

Mostre que no caso singular $1 + \lambda = 0$ devemos considerar a existência de perturbação do fluxo de calor. Calcule as equações para a quantidade $q(t)$ definida pela expansão na base harmônica dada por $\delta q_m = q(t) Q_m$.

.....

Hamiltoniana da perturbação

O exame das perturbações da cosmologia de Friedmann admite uma formulação hamiltoniana. Para fazer isso, começamos por reconhecer que no sistema dinâmico que obtivemos, as variáveis E e Σ não são canonicamente conjugadas. Com efeito, vamos examinar o caso simples, mas completamente genérico, onde o sistema em questão é dado por (faremos $\xi = 0$)

$$\dot{E} = -\frac{1+\lambda}{2} \rho \Sigma - \frac{\theta}{3} E$$

$$\dot{\Sigma} = \left(\frac{6\lambda}{1+\lambda} \left(\epsilon + \frac{k^2}{3} \right) \frac{1}{a^2 \rho} - 1 \right) E$$

Note que, de fato,

$$\frac{\partial \dot{E}}{\partial E} + \frac{\partial \dot{\Sigma}}{\partial \Sigma} = -\frac{\theta}{3}.$$

Vemos então que a expansão do universo $\theta \neq 0$ é a responsável por impedir que as variáveis E e Σ sejam canonicamente conjugadas. Podemos então usar o procedimento padrão nesse caso e definir, a partir destas duas, novas variáveis que sejam canonicamente relacionadas. Chamando de Q e P , funcionais lineares de Σ e E dados por

$$\begin{bmatrix} Q \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \eta \\ \delta & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma \\ E \end{bmatrix}.$$

Note que a variável Q aqui definida não tem nenhuma conexão com a base Q que usamos anteriormente.

Deveríamos esperar que esta matriz que relaciona (Q, P) com (E, Σ) dependa das quantidades não-perturbadas. Ademais, esta matriz é unívoca a menos de transformações canônicas (demonstre essa afirmação). Podemos então usar este fato e escolher η e δ como sendo zero. A hamiltoniana \mathcal{H} que contém a dinâmica do par (Q, P) se obtém a partir das equações de evolução de E e Σ .

Exercício:

Mostre que a condição para que estas novas variáveis Q e P sejam canonicamente conjugadas e que uma Hamiltoniana exista é dada por

$$\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} + \frac{\dot{\beta}}{\beta} - \frac{1}{3}\dot{\theta} = 0.$$

Então podemos escrever

$$\mathcal{H} = \frac{h_1}{2} Q^2 + \frac{h_2}{2} P^2 + 2 h_3 P Q$$

onde h_1 , h_2 e h_3 são definidos por

$$h_1 \equiv \frac{\beta}{\alpha} \frac{(1 + \lambda)}{2} \rho$$

$$h_2 \equiv -\frac{\alpha}{\beta} \left\{ 1 + \frac{2\lambda}{(1 + \lambda) \rho a^2} (k^2 + 3\epsilon) \right\}$$

$$h_3 \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{3} - \frac{\dot{\beta}}{\beta} \right).$$

No caso especial em que escolhemos um par de variáveis canônicas tais que $\beta = a$ (quanto vale α ?) temos os valores especiais

$$Q = \Sigma$$

$$P = a(t) E.$$

Neste caso a hamiltoniana \mathcal{H} tem a forma

$$\mathcal{H} = -\Delta^2(t) P^2 + \gamma^2(t) Q^2$$

onde $\gamma(t)$ e $\Delta(t)$ são dados em termos da densidade de energia do *background* ρ , o fator de escala $a(t)$ e o comprimento de onda k como

$$\gamma^2(t) \equiv \left(\frac{1 + \lambda}{4} \right) \rho a$$

$$\Delta^2(t) \equiv \frac{1}{2a} \left(1 - \frac{2\lambda}{(1 + \lambda)\rho a^2} (k^2 + 3\epsilon) \right).$$

.....

Comentários

O sistema hamiltoniano de que estamos tratando e que contém toda a informação da perturbação do modelo de Friedmann não é conservativo (isto é, a derivada temporal da hamiltoniana $\dot{\mathcal{H}}$ não é zero). Isto é consequência de que o estado fundamental deste sistema, o estado não-perturbado $Q = P = 0$, que corresponde não ao espaço-tempo plano de Minkowski — destituído de qualquer forma de energia — mas sim corresponde a um universo de Friedmann em expansão. O fato da hamiltoniana não ser positivamente definida é também consequência de que o estado fundamental envolve a curvatura não perturbada, que não é nula. Em suma, o sistema em questão não é isolado e *momentum* e energia podem ser extraídos do estado fundamental não-perturbado.

Notemos por fim que a estrutura hamiltoniana que obtivemos aqui em termos das variáveis E and Σ é completamente independente de gauge. A principal vantagem do esquema JEK que vimos utilizando, reside precisamente em que estamos usando quantidades que possuem interpretação direta e simples: as quantidades perturbadas *shear* Σ e a parte elétrica do tensor de Weyl E .

Exercício: perturbação do universo estático de Einstein

Mostre que, como consequência de este modelo não possuir expansão, a hamiltoniana se reduz a:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2\mu^2} P^2 + \frac{1}{2} \omega^2 Q^2$$

onde μ e ω são constantes. Note que esta expressão nada mais é do que a hamiltoniana de um oscilador com uma massa imaginária. Encontramos assim, uma vez mais, o resultado da instabilidade do universo de Einstein.

Exercício: perturbação da densidade de energia

De modo geral, não estamos interessados no conjunto completo de equações da perturbação, mas sim em um sub-conjunto capaz de conter informação fechada sobre uma determinada variável (ou conjunto de variáveis). Isso acontece, por exemplo, quando estudamos a questão da evolução das inomogeneidades presentes no universo, com o propósito de entender o mecanismo de formação de galáxias, estrelas, etc. Nesta seção veremos como é possível conhecer a evolução do parâmetro de contraste definido pela razão $\delta\rho/\rho$ que mede a perturbação da densidade de energia por densidade não perturbada. Consideremos um caso simples onde o fluido galático é constituído por um gás incoerente sem pressão ($p = 0$) e a geometria não perturbada tem a seção espacial euclideana. Escrevemos para a densidade perturbada $\delta\rho$ a expansão:

$$\delta\rho = N(t)Q$$

onde se fez uma escolha de gauge e a parte homogênea foi feita zero. Mostre que

$$\ddot{N} + \frac{8}{3} \dot{N}\theta + \frac{4}{3} N\theta^2 - N\rho = 0$$

Neste caso, temos

$$\rho = \frac{4}{3} t^{-2} \quad \theta = 2t^{-1}$$

A equação acima se reduz a:

$$\ddot{N} t^2 + \frac{16}{3} \dot{N} t + 4N = 0$$

cuja solução é dada por

$$N(t) = \alpha t^{-4/3} + \beta t^{-3}$$

com α e β constantes.

Podemos então escrever para o fator de contraste

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{3}{4} \alpha t^{2/3} + \frac{3}{4} \beta t^{-1}$$

Vemos assim que, além do fator evanescente, existe um termo que cresce com a potência $2/3$ do tempo, responsável pela instabilidade do modelo de Friedmann. Mostre que o termo que decai com t^{-1} pode ser eliminado e nada mais é do que um resquício de nossa escolha de gauge.

Exercício:

Mostre que as equações quase-maxwellianas relevantes para a perturbação que fizemos do modelo de Friedmann são dadas por:

$$\begin{aligned} (\delta E^{\mu\nu})_{;\nu} h_{\mu}^{\alpha} h_{\nu}^{\beta} + \Theta (\delta E^{\alpha\beta}) - \frac{1}{2} (\delta E_{\nu}^{(\alpha} h^{\beta)})_{\mu} V^{\mu;\nu} \\ + \frac{\Theta}{3} \eta^{\beta\nu\mu\varepsilon} \eta^{\alpha\gamma\tau\lambda} V_{\mu} V_{\tau} (\delta E_{\varepsilon\lambda}) h_{\gamma\nu} \\ = -\frac{1}{2} (\rho + p) (\delta\sigma^{\alpha\beta}) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} (\delta E_{\lambda}^{\mu})_{;\tau} h_{\mu}^{(\alpha} \eta^{\beta)\tau\gamma\lambda} v_{\gamma} = 0$$

$$(\delta E_{\alpha\mu})_{;\nu} h^{\alpha\varepsilon} h^{\mu\nu} = \frac{1}{3} (\delta\rho)_{,\alpha} h^{\alpha\varepsilon} - \frac{1}{3} \dot{\rho} (\delta V^{\varepsilon})$$

$$(\delta\theta)^{\bullet} + \frac{2}{3} \theta (\delta\theta) - (\delta a^{\alpha})_{,\alpha} = -\frac{(1+3\lambda)}{2} (\delta\rho)$$

$$(\delta\sigma_{\mu\nu})^\bullet + \frac{1}{3}h_{\mu\nu}(\delta a^\alpha)_{;\alpha} + \frac{2}{3}\theta(\delta\sigma_{\mu\nu}) = -(\delta E_{\mu\nu})$$

$$(\delta\rho)^\bullet + \theta(\delta\rho + \delta p) + (\rho + p)(\delta\theta) = 0.$$

REFERÊNCIAS

- [1] L. D. Landau e E. M. Lifshitz. *The classical theory of fields*. Pergamon Press, 1975.
- [2] R. Adler, M. Bazin e M. Schiffer. *Introduction to General Relativity*. McGraw-Hill Book Company, 1965.
- [3] S. W. Hawking e G. F. R. Ellis. *The large scale structure of space-time*. Cambridge University Press, 1973.
- [4] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology*. Ed. John Wiley, 1972.
- [5] R. M. Wald. *General Relativity*. University of Chicago Press, 1984.
- [6] M. Novello. *Cosmologia*. coleção CBPF: Tópicos de Física. Editora Livraria da Física, 2010.
- [7] M. Novello e Érico Goulart. *Eletrodinâmica não-linear (causalidade e efeitos cosmológicos)*. Editora Livraria da Física, 2010.
- [8] H. Weyl. *Space, Time, Matter*. Ed. Dover, 1922.
- [9] F. Hoyle. *The Universe: Past and Present Reflections*. 1992.
- [10] *Série dos livros da Brazilian School of Cosmology and Gravitation*.
- [11] M. Novello. *Weak and Electromagnetic forces as a consequence of the self-interaction of the γ field*. Phys Rev D, vol 8, 8 2398. 1978.
- [12] M. Novello, M. Visser e G. Volovik (Eds). *"Artificial Black Holes", Proceedings of the Workshop "Analog Models of General Relativity" (held at the Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Brazil, Oct. 2000)*. World Scientific. 2002.
- [13] C Barcelo, S Liberati e M Visser. *ArXiv:gr-qc/0505065, ClassQuantum Gravity 18, 3595*. 2001.
- [14] M. Novello e R. P. Neves. *Class. Quantum Grav.* 19 (2002) 1.
- [15] S. Hayakawa. "Supplement Progress Theoretical Physics". Em: (1965).

- [16] M Novello e J. Duarte de Oliveira. "On Dual Properties of the Weyl Tensor in General Relativity and Gravitation, vol 12, 11 871". Em: (1980).
- [17] J.A. Wheeler. *Gravitational and electromagnetic wave flux compared and contrasted in Phys Rev D, vol 16, 12 3384*. 1977.
- [18] Y. Choquet-Bruhat, C. de Witt-Morette e M.Dillard-Bleick. "Analysis, Manifolds and Physics". Em: (1977). see also J. Hadamard, *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique*, Hermann, Paris, 1903.
- [19] Yvonne Choquet-Bruhat e M.Novello. "Comptes Rendues Acad. Sci. Paris, t. 305, série II, p. 155". Em: (1987).
- [20] M. Novello, E. Bittencourt e J. M. Salim. *The quasi-Maxwellian equations of General Relativity: applications to perturbation theory*. Brazilian Journal of Physics 44, 832. 2014.
- [21] V. L. Ginzburg, D. A. Kirzhnits e A. A. Lyubushin. "Soviet Physics JETP 33, 242". Em: (1971).
- [22] M.Novello. "Absortion of gravitational waves by an excited vacuum space-time in Physics Letters vol 61 A, 7 441". Em: (1977).
- [23] M Novello. "Excitations of the gravitational field". Em: *Revista Brasileira de Fisica vol 8, 2 442* (1978).
- [24] M. Novello, N. F. Svaiter e M. E. X. Guimarães. "Synchronized frames for Godel s universe in General Relativity and Gravitation, vol 25, no2 137". Em: (1993).
- [25] M. Novello e A. L. Velloso. "General Relativity and Gravitation, vol 19, no 12 pg 1251-1265". Em: (1987).
- [26] A. Z. Petrov. "Einstein spaces, Ed. Pergamon Press". Em: (1969).
- [27] M. Novello e I. Damião Soares. "Eigenvalue treatment of cosmological models in Physics Letters 64 A, pg 153". Em: (1977).
- [28] M.Novello, C. A. P. Galvão, I. Damião Soares e J. M. Salim. "Electric and magnetic gravitational monopoles I. The equation of motion of poles in Journal of Physics vol 9, 4, 547". Em: (1976).
- [29] V. D. Zakharov. "Gravitational waves in Einstein rqs theory. Ed John Wiley". Em: (1973).
- [30] M. Novello, J. M. Salim e E. Ruckert. *Non linear photons in the universe: the anisotropic case in Lettere al Nuovo Cimento, vol 40, no 8 232*. 1984.
- [31] M. A.Markov. "Cosmology and elementary particles (lecture notes), ICTP (Trieste)". Em: (1971).
- [32] M.Novello. "Static Inhomogeneous Cosmological Model, Physics Letters vol 61 A, 5 293". Em: (1977).

- [33] R. J. Gott III. "Phys Rev Letters 66, 1126". Em: (1991).
- [34] M. Novello e M. C. Motta da Silva. "Phys Rev D, vol 48, 10 5017". Em: (1993).
- [35] I. Damião Soares e M. Novello. "Spherically symmetric neutrino radiating stars in Physics Letters vol 55 A, 5". Em: (1975).
- [36] M. Novello e E. Bittencourt. "Gaussian coordinate system for the Kerr metric in Gravitation and Cosmology, vol 17, 3 p. 230". Em: (2011).
- [37] Igor D. Novikov. "Physics and astrophysics of black holes and physics of time machines in IX Brazilian School of Cosmology and Gravitation ED. M Novello". Em: (1998).
- [38] M Novello, I Damião Soares e J. Tiomno. "Geodesic motion and confinement in Godel's universe in Phys Rev D vol 27, no 4 779". Em: (1993).
- [39] M. Novello, N. F. Svaiter e M. E. X. Guimarães. "Backwards time-travel induced by combined magnetic and gravitational fields in Modern Physics Letters A vol7, no 5b 381". Em: (1992).
- [40] Regina Célia Arcuri. "Tese de Mestre *Núcleos atrasados de matéria* (CBPF)". Em: (1992).
- [41] K. Lake. "Local inhomogeneities in a Robertson-Walker background. I. General framework". Em: (n.d.).
- [42] M Novello e M. J. Rebouças. "The stability of a rotating universe in Astrophysical Journal, 225 719". Em: (1978).
- [43] M Novello e S. E.P. Santiago. "Bouncing cosmologies in Physics Reports vol 463, 4 127-213". Em: (1978).
- [44] V. N. Melnikov e S. V. Orlov. "Phys. Lett A 70 263". Em: (1979).
- [45] M. Novello e J. M. Salim. "Phys Rev D 20 377". Em: (1979).
- [46] M. Novello e C. Romero. "Nonminimal gravitational coupling, the spectrum of cosmic solutions in General Relativity and Gravitation vol 19, 10 1003". Em: (1986).
- [47] M. Gasperini. "Class. Quantum Gravity, 17 1". Em: (2000).
- [48] M. Novello, L. A. R. Oliveira e J. M. Salim. "Geometrized instantons and the creation of the universe in International Journal of Modern Physics D vol 1, n03 e 4 641". Em: (1993).
- [49] M Novello e N.P. Neto. "A modified theory of gravity, CBPF- NF- 002". Em: (1987).
- [50] L. Ford. "QFT in curved spacetime in VII Brazilian School of Cosmology and Gravitation, Ed. M. Novello (Editions Frontiers)". Em: (n.d.).

- [51] I. Costa, Nathalie Deruelle, M Novello e Nami F Svaiter. "Quantum fields in cosmological spacetimes: a soluble example in *Class. Quantum Gravity* 6 1893". Em: (1989).
- [52] M Novello e E. Bittencourt. "Gen. Rel. Grav. 45, 1005". Em: (2013).
- [53] M. Novello e E. Bittencourt. "Metric Relativity and the dynamical bridge: highlights of Riemannian geometry in physics in *Brazilian Journal of Physics* 45 6, 756-805". Em: (2015).
- [54] "Leçons sur la propagation des ondes et les equations de l'hydrodynamique, Ed. Dunod, Paris". Em: (1958).
- [55] P. Painlevé. "*C. R. Acad. Sci. (Paris)*, 173, 677". Em: (1921).
- [56] A. Gullstrand. "*Arkiv. Mat. Astron. Fys.*, 16, 1". Em: (1922).
- [57] W. Gordon. *Ann. Phys. (Leipzig)*. **72**, 421. 1923.
- [58] M. Novello, V. A. De Lorenci, J. M. Salim e R. Klippert. *Physical Review - D* **61**, 045001. 2000.
- [59] M. Novello e J.M. Salim. *Phys. Rev. D* **63**, 083511. 2000.
- [60] M. Novello, E. Huguet e J. Queva. "Toy model of a fake inflation in *Physical Review D* 73, 123531". Em: (2006).
- [61] F. Finelli e R. Branderberger. Em: *arXiv:hep-th/0112249, November (2002)*.
- [62] M. Novello, M. Makler, L. S. Werneck e C. A. Romero. "*Physical Review D* 71, 043515". Em: (2005).
- [63] A. Y. Kamenshchik, U. Moschella e V. Pasquier. "An alternative to quintessence". Em: *Phys. Lett.* (2001).
- [64] M. Novello, E. Bittencourt, U. Moschella, E. Goulart, J. M. Salim e J. D. Toniato. "Geometric scalar theory of gravity in *Journal of Cosmology and Astroparticles Physics JCAP* 06 014". Em: (2013).
- [65] M. Novello e E. Bittencourt. "Lectures on the Geometric Scalar Theory of Gravity: XVth BSCG, September Cambridge Scientific Publishers". Em: (2012).
- [66] M. Novello. "Ghost basis for neutrino in *Physics Letters* vol 58 A, 2 75". Em: (1976).
- [67] M Novello e J M Salim. "Cesar Lattes 70 anos (A nova fisica brasileira) Editor Alfredo Marques". Em: (1994).
- [68] D. Lemoine e M. Lemoine. "*Physical Review D*, 52, 4". Em: (1995).
- [69] P. A. M. Dirac. "*Proc. Roy. Soc. A* 209 291". Em: (1951).
- [70] M. Novello. "A note concerning the gravitational indistinguishability of a neutrino field and stokesian fluids in *Physics Letters* 69 A, 5 309". Em: (1979).
- [71] M. Novello. "Stokesian fluids and cosmology in *Nukleonika*, vol 25 1405". Em: (1980).

- [72] A. A. Andronov, E. A. Leontovich, I. I. Gordon e A. G. Maier. "Theory of Bifurcations of Dynamic Systems on a Plane". Em: (1971).
- [73] M. Novello e R. A. Araujo. "Qualitative analysis of homogeneous universes in Phys. Rev. D, 22 , 260". Em: (1980).
- [74] M. Novello e Ligia M. C. S.Rodrigues. "Proceedings of the third Marcel Grossmann meeting, North-Holland Company". Em: (1983).
- [75] I. Prigogine e I Stengers. "La Nouvelle Alliance", Ed. Gallimard". Em: (1979).
- [76] W. Heisenberg. "Review of Modern Physics 29, 269". Em: (1957).
- [77] D. J. Gross e A. Neveu. "Phys. REv. 10, 3235". Em: (1974).
- [78] M. Novello e R. C. Arcuri. "International Journal of Modern Physics A, vol 15, n 15 2255". Em: (2000).
- [79] S. Joffily e M. Novello. "Cosmology of a Heisenberg Fluid". Em: (2016).
- [80] M Novello e C. E. L. Ducap. "Arxiv 1611.05764". Em: (2017).
- [81] M.Veltman. *Lectures CERN*. Nessas aulas uma revisão histórica desse mecanismo é apresentada. 1997-2005.
- [82] M Novello. *The cosmological origin of the Nambu-Jona-Lasinio model*. Volume 26. International Journal of Modern Physics A. 2011. Capítulo 22, página 3781.
- [83] E. Cartan. *C. R. Acad. Sci. (Paris)*. Volume 174. 1922, página 593.
- [84] E. W. Kolb e M. S. Turner. *The early universe*. Ed Addison-Wesley, 1990.
- [85] J. M. Bardeen. *Phys Rev D 22, 1882*. 1980.
- [86] S. Hawking. *Astrophysical Journal 145, 544*. 1966.
- [87] B. Jones. *Observing the Universe*. Editado por M. Novello. VII brazilian School of Cosmology and Gravitation (Rio de Janeiro). Editions Frontieres, Paris, 1993.